وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بغداد

الميكانيك التحليلي

تأليف

گرانت ر. فاولس
جامعة يوتا

ترجمة

الدكتور طالب ناهي الخفاجي
الاستاذ المساعد في قسم الفيزياء
كلية العلوم - جامعة بغداد

هذه ترجمة لكتاب

Analytical Mechanics

By

Grant R. Fowles

Second Edition - 1970

Holt Rinehart and Winston, Inc.

New York, London.

مقدمة المترجم

لا شك في ان التحولات العلمية في بلدنا العزيز ، وما تمخض عنها من مردودات ايجابية مستمرة ومتواصلة في المجالات العلمية ، تتطلب منا الانفتاح التام على المنجزات العلمية التي تمت وتتم في البلدان المتقدمة ، بغية الاستفادة منها في اضافة لبنات جديدة لبنائنا الصناعي المتنامي . ومن مستلزمات ذلك الانفتاح تعريب الكتب العلمية القيمة ، خصوصا وان المكتبة العربية تكاد ان تخلو من المصادر العلمية العربية . لذا اقدمت على ترجمة هذا الكتاب في موضوع الميكانيك التحليلي . وكان سبب اختياري لهذا الكتاب بالذات، دقته العلمية ووضوح عبارته وسلاسة اسلوبه وشمول موضوع بحثه وما تميز به من امثلة وتمارين تقرب الفكرة الى ذهن الطالب وتمكنه في معرفة مدى استيعابه للمادة . اضافة الى احاطة علم القارئ ببعض الجوانب المتعلقة بعلم حيوي يلعب دورا اساسيا في بناء الصناعة الحديثة ، الا وهو علم الفيزياء .

وقد حاولت جهد امكاني التوفيق بين لغة المؤلف الانكليزية واللغة العربية ـ رغم ما في ذلك من مصاعب ـ طامحا قدر المستطاع في نقل مضمونه بأمانة واخلاص وآملا ان اكون قد وفقت في هذا المضمار لتحقيق الغرض المطلوب منه والله ولي التوفيق .

طالب ناهي الخفاجي

مقدمة المؤلف

ان الغاية المتوخاة من هذا الكتاب هي ان يكون كتابا مدرسيا في موضوع الميكانيك التحليلي لطلبة الصفوف الثالثة في الفيزياء أو العلوم الهندسية • ومن متطلباته ان يكون الطالب ملما في الفيزياء العامة ورياضيات التفاضل والتكامل ، اضف الى ذلك ، يفضل ان يكون الطالب قد درس او يدرس في الوقت ذاته رياضيات متقدمة تتضمن المعادلات التفاضلية •

ان المخطط التمهيدي للطبعة الحالية هو مخطط الطبعة الاولى نفسه ، ولكن ، هناك توسع في بحث عدد كبير من بنوده ، كما أضيفت اليه بنود جديدة اخرى خصوصا في الفصل الاخير عن نظرية النسبية • كما اضيفت اليه عدد كبير من التمارين مما جعل عددها في هذه الطبعة ضعف ما كانت عليه في الطبعة الاولى ، كما اعيد تنظيم الفصل الرابع بصورة مستفيضه " داينميك الجسيم ، الحركة العامة " وقد عرضت رياضيات المتجهات في الفصل الاول واستخدمت في كل مكان من الكتاب • حيث اشتمل الفصلان الاول والثاني على مقدمة قصيرة عن رياضيات المتجهات • وفي الفصل الثالث فقد بحثت حركة الجسيم على خط مستقيم وفي الفصل الرابع بحثت حركة الجسيم بصورة عامة • اما في الفصل الخامس فقد شرحت تأثيرات حركة المحاور الانتقالية والدورانية وعلاقتها بوصف حركة الجسيم • ولما كان لتطبيق ميكانيك الاجرام السماوية اهمية خاصة في علم الفضاء ، لذلك افرد له بحث مستفيض في الفصل السادس • وهناك تطبيقات اخرى عن علم الفضاء في الفصلين الخامس والسابع •

وبرهنت النظريات العامة التي تخص حركة منظومة متكونة من عدد من الجسيمات في الفصل السابع ، ووضحت بدراسة التصادم وحركة الصاروخ • وخصص الفصلان التاليان لدراسة حركة الجسيم الصلد • امّا الفصل الثامن فقد تضمن قليلا من الستاتيك ، لان في هذه المرحلة ، يكون الطالب قد اكتسب خبرة في هذا الموضوع من حل تمارين التوازن الستاتيكي في مواضيع الفيزياء التي سبقت هذا الموضوع •لم يحتوى الكتاب على موضوعي المرونه والهيدروداينميك ، لانّ المولف يرى وجود تأجيل هذين الموضوعين الى الصف الرابع او للدراسة العليا • اي بعد ان يتهيأ الطالب تماما في الرياضيات •

احتوى الفصل العاشر على بحث ميكانيك لاكرانج ، كما تضمن هذا الفصل بحثا

مختصرا عن معادلات هملتن • واستخدمت طريقة لاكرانج في الفصل الحادي عشر لدراسة تذبذب المنظومات كما احتوى هذا الفصل على شرح مختصر عن استقرار التوازن •

يحتوي الفصل الاخير على مقدمة في النظرية النسبية الخاصة • والجزء الاول منه اقتصر على تحويلات لورنس ونتائجها المباشرة • وتضمن الجزء الاخير من هذا الفصل على بحث استخدام المصفوفات في دراسة النظرية النسبية الخاصة •

هناك مجموعة كبيرة من التمارين في نهاية كل فصل • بعض منها نظريات مهمة على الطالب برهنتها ، على ان يعطيه المدرس تلميحا • كما ان المؤلف يتوقع من الطالب ان يساهم في تطوير المادة • بدلا من تعويض ارقام في المعادلات التي اشتقت في الكتاب • كما اعطيت اجوبة التمارين الفردية في نهاية الكتاب • كما اننا مستعدون لتزويد المدرس باجوبة التمارين الاخرى عند الطلب •

وقد وضعت علامة النجمه على البنود المتقدمة والتي يمكن حذفها دون ان تؤثر على سير تدريس الموضوع ، خصوصا اذا كان الوقت المخصص لتدريس الموضوع قصيرا • وعلى أية حال ، يفضل ان يقرأ الطلبة الجيدين هذه البنود •

واخيرا اقدم شكري الى جميع الذين ساعدوني في طبعة الكتاب الاولى والى الذين انتقدوه انتقادا بناء بعد استخدامه ، حيث ساعدني هذا كثيرا في تحضير الطبعة الحالية •

كرانت ر • فاولس

المحتويـــات

الفصل الاول

مفاهيم اساسية ـ المتجهات

Fundamental Concepts-Vectors

في اية نظرية علمية وخصوصا في علم الميكانيك يجب ان نبدأ بمفاهيم معينة اولية ٠ كذلك من الضروري وضع عدد معين من الفرضيات المعقولة ٠

ان من اكثر المفاهيم اساسية مفهومان هما ـ الفضاء Space والزمن Time واعتمادا على دراستنا الاولية لعلم الحركة في الميكانيك سنفترض ان الفضاء الفيزيائي المتعامل فيه اعتياديا يوصف بالفضاء الرياضي ذى الابعاد الثلاثة للهندسة الاقليدية وهذا وصف نستطيع الاكتفاء به الان ٠٠ اما بالنسبة لمفهوم الزمن ٠ فسنفترض سلسلة من الاحداث المرتبة المتتابعة التي يمكن ان تقاس بمقياس زمني منتظم مطلق ٠ بالاضافة الى ذلك سنفترض ان لكل من الفضاء والزمن كيانا مستقلا واضحا ٠ الا اننا عندما ندرس النظرية النسبية فيما بعد سنعيد النظر في مفهومي الفضاء والزمن اللذين سوف نجدهما غير مستقلين ولا مطلقين ٠ وهي مسألة سوف نعود اليها بعد ان ندرس اسس الميكانيك الكلاسيكي ٠

لاجل تعريف موضع جسم في الفضاء ٠ من الضروري اتخاذ محاور مرجعية ٠ وسنستعمل نظام الاحداثيات في الميكانيك والنوع الاساسي لنظام الاحداثيات الذى يفي باغراضنا هو نظام الاحداثيات الديكارتية

Cartesian Coordinate او نظـام الاحداثيات المتعامـدة وهو مجموعـة مكـونة من ثلاث مسـتقيمات (او محـاور) متعامـدة في هذه الاحداثيـات يعـين موضـع نقطـة بثلاثـة اعـداد او محـاور هي z,y,x وتتغـير احداثيـات النقطـة المتحركـة بمـرور الزمـن ، اى تكون الاحداثيـات دوال للكميـة t المقاسـة على مقياسـنا الزمني •

ان الجسيم او النقطـة الكتليـة من المفاهـيم المفيـدة في الميكانيك ، والجسيم شـيء له كتلـة[1] ولكن ليس لـه امتداد بعـدى • انه ، بتعبير ادق ، مفهوم مثالي مجـرد لا وجـود لـه في الطبيعـة فحتى الالكترون لـه حجـم محـدود • ولكن فكـرة الجسيم مفيـدة كتقريب لجسـم صغير او بتعبير ادق لجسـم ذى حجـم غير مـهم نسـبيا في نطاق بحث معين • وهكـذا يمكننـا مثـلا معاملـة الارض كجسيم في ميكانيك الفلك •

١ ـ ١ الكميـات الفيزيائيـة والوحدات Physical Quantities & Units

يعبر عن الحقائق الفيزيائيـة التي تحت المشـاهدة بدلالة مكـونات اسـاسـية ثابتـة تسـمى الكميـات الفيزيائيـة مثل الطـول والزمـن والقـوة وهلم جـرا •• والكميـة الفيزيائيـة هي الشـيء الذى يمكـن قياس مقـداره بدلالة وحـدة مختـارة • فمثـلا عندما نقـول ان طـول جسـم معين (٧ سم) نعنى بـذلك ان القياس الكمي (٧) هو العلاقـة (النسـبة) بين طـول الجسـم وطول الوحـدة (١ سـم) •

وقـد وجد انـه من الممكـن تعريف جميع الكميات الفيزيائية في الميكانيك بدلالـة ثلاث وحـدات اسـاسـية فقط هي الطول والكتلة والزمن •

وحـدة الطـول

ان وحـدة الطـول القياسيـة هي المتر • وقد كان المـتر سـابقا

---

(١) سـيشـرح مفهـوم الكتلـة في الفصل الثالث

المسافة المحصورة بين حدين ثابتين على قضيب من البلاتين محفوظ في دار المقاييس العالمية في فرنسا . اما الان فان المتر يعرف بالمسافة التي تحتويها ٧٣ ر ١٦٥٠٧٦٣ موجه ضوئية كاملة لخط الطيف البرتقالي لنظير الكربتون ـ ٨٦ .

وحدة الكتلة

ان وحدة الكتلة القياسية هي الكيلوغرام . وهي كتلة اسطوانة من فلزى البلاتين والايراديوم محفوظة في دار المقاييس العالمية .

وحدة الزمن

الوحدة الاساسية لقياس الزمن هي الثانية وقد عرفت سابقا بدلالة دوران الارض . الثانية بهذا التعريف هي مقدار الزمن لـ ٩١٩٢٦٣١٧٧٠ ذبذبة تحدث في انتقال ذرى خاص لنظير السيزيم Cesium ذى العدد الكتلي ـ ١١٣ .

ان نظام الوحدات آنف الذكر يسمى بالنظام العالمي[٢] (I.S.) والمعيار الذرى الحديث للطول والزمن في هذا النظام ليس فقط اكثر دقة من المعايير السابقة وانما يمكن استنتاجه عالميا وهو غير قابل للفناء الا ان التكنيك الحالي لسوء الحظ غير عملي لاستخدام معيار ذرى للكتلة .

في الواقع ليس هناك سبب خاص لاستخدام الطول والكتلة والزمن كمجموعة اساسية لتعريف الوحدات . فقد استخدمت مجموعات اخرى من

(٢) في هذا النظام توجد وحدة رابعة هي الكولوم التي تستعمل لتعريف الوحدات الكهربائية .

الكميات الفيزيائية مثل الطول والقوة والزمن في النظام التثاقلي .

وتوجد انظمة اخرى شائعة الاستعمال بالاضافة الى نظام I.S. كنظام cgs او سنتمتر ـ غرام ـ ثانية ونظام FPS او قدم ـ باوند ـ ثانية . وهذان النظامان يمكن اعتبارهما ثانويين بالنسبة لنظام I.S. لان وحداتهما عرفت بصورة خاصة ككسور لوحدات I.S.

١ سم = ١٠$^{-٢}$ م

١ غم = ١٠$^{-٣}$ كغم

١ قدم = ٣٠٤٨ر٠ م

١ پا = ٤٥٣٦ر٠ كغم

١ ـ ٢ الكميات العددية والمتجهة Scalar and Vector Quantities

ان الكميات الفيزيائية التي تعين تعيينا كاملا بمعرفة مقدارها فقط تسمى " الكميات العددية Scalars" ومن الامثلة الشائعة للكميات العددية ـ الكثافة والحجم ودرجة الحرارة . وتعامل الكميات العددية رياضيا كاعداد حقيقية عادية . وتخضع عند الجمع والطرح والضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر .

وهناك كميات فيزيائية معينة تحتوي على خاصية اتجاهية ، مثل الازاحة من نقطة في الفضاء الى اخرى .. مثل هذه الكميات يلزم لوصفها بصورة كاملة ذكر اتجاهها فضلا عن مقدارها . وتسمى هذه الكميات بالكميات المتجهة Vectors وهي اذا اتحدت مع بعضها تخضع لقانون متوازي

الاضلاع للجمع والذى سنشرحه فيما بعد في بند ١ ـ ٦[٣] بالاضافة الى الازاحة في الفضاء هناك امثلة شائعة اخرى للمتجهات مثل السرعة والتعجيل والقوة • ان مفهوم المتجه وتطوير رياضيات الكميات المتجهة ككل اثبتا ضرورتهما في تطوير علم الميكانيك • وسيكرس ما تبقى من هذا الفصل لدراسة مختصرة في جبر المتجهات •

١ ـ ٣ رموز Notation

تمثل الكميات المتجهة بحروف الطابعة الثقيلة مثل (A) بينما تمثل الكميات العددية بحروف الطابعة الاعتيادية •

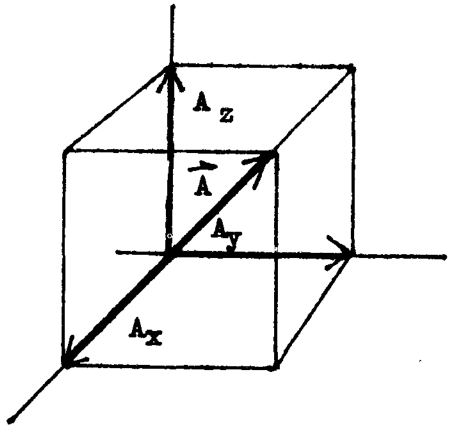
اما في الكتابة فتستعمل اعتياديا علامة مميزة كالسهم الذى يدل على ان الكمية متجهة مثل $\vec{A}$.

يعين اى متجه مثل $\vec{A}$ بصورة كاملة بذكر مقداره واتجاهه بالنسبة الى محاور يتفق عليها كمرجع • ويمثل في الرسم بسهم يشير الى اتجاه المتجه ويتناسب طوله مع مقداره

---

(٣) كمثال لكمية لها اتجاه ولكن لا تخضع لقانون الجمع هو الدوران المحدود لجسم حول محور معين ويمكن للقارئ ان يتحقق بسهولة من ان دورتين متتابعتين حول محاور مختلفة لا تحدثان نفس تأثير الدوران المنفرد الذى يعين من قانون متوازى الاضلاع على اية حال سوف لا نهتم في الوقت الحاضر بكميات من هذا النوع •

كما هو مبين في الشكل (١ ــ ١) ويعين كذلك تعيينا كاملا



الشكل (١ ــ ١) مركبات متجه في المحاور الديكارتيه

بذكر مركباته او مساقطه على طول المحاور المستخدمة وسيستعمل رمز مركبات المتجه $[A_x, A_y, A_z]$ كتمثيل آخر للمتجه ٠

فالطرف الايمن من المعادلة $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$ يمثل المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته في محاور خاصة (سيفرض ان المحاور الديكارتيه هي المقصودة ، ان لم يذكر خلافا لذلك) ٠ فمثلا اذا كان $\vec{A}$ يمثل الازاحة من النقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ الى النقطة $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عندئذ $A_z = z_2 - z_1$, $A_y = y_2 - y_1$, $A_x = x_2 - x_1$

واذا كان $\vec{A}$ يمثل قوة ، فعندئذ تكون A_x مركبة القوة وهلم جرا ٠ وواضح ان القيم العددية لمركبات متجه معين تعتمد على اختيار المحاور

اذا اقتصر بحث خاص على متجهات واقعة في مستو واحد يلزمنا في هذه الحال مركبتان فقط وبالعكس ،فمن الممكن تعريف فضاء رياضي لاي عدد من الابعاد ٠ اذن يمثل الرمز $(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n)$

متجها ابعاده n • وفي هذا المفهوم المجرد يصنف المتجه كمجموعة اعداد •

١ ـ ٤ تعاريف اصطلاحية وقواعد Formal Definitions and Rules

تبدأ دراسة جبر المتجهات ببعض التعاريف الاصطلاحية الخاصة بالمتجهات :ـ

١ ـ تساوى المتجهات Equality of Vectors

المعادلة $\vec{A} = \vec{B}$

او $(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$

تكافيء المعادلات الثلاث التالية :ـ

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$

اى تتساوى المتجهات اذا تساوت مركباتها المتعاقبة

٢ ـ جمع المتجهات Vector Addition

يعرف جمع اى متجهين بالمعادلة التالية :

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)$$

وهذا يعني ان مجموع اى متجهين هو متجه اخر مركباته مساوية لمجموع مركبات المتجهين المعلومين •

٣ ـ الضرب بكمية عددية Multiplication by a scalar

اذا كانت c كمية عددية و $\vec{A}$ كمية متجهة فان

$$c\vec{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \vec{A}c$$

اى حاصل الضرب $c\vec{A}$ كمية متجهة اخرى مركباتها c من المرات اكبر من مركبات المتجه $\vec{A}$.

٤ــ طــرح المتجهـــات Vector Subtraction

يعرف طــرح المتجهـــات كما يلي :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\,\vec{B} = (A_x - B_x,\ A_y - B_y,\ A_z - B_z)$$

٥ــ متجــه الصفــر The Null Vector

المتجــه $\vec{0} = (0,0,0)$ يسمى متجــه الصـــر .

واتجاه متجــه الصفر غير معرف ومن (٤) تحصل على $\vec{A}-\vec{A} = 0$

ولما كان استـعمال الصفر بدلا من متجــه الصفر ليس مربكا لـــــــذلك سنستعمل في المستقبل الرمز $0 = \vec{0}$.

٦ــ قانون تبادل الحـــدود في الجمع The Commutative Law of Addition

يصـــح هذا القانون في جبر المتجهات اى ان

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

لان $A_x + B_x = B_x + A_x$ كذلك بالنسبة لمركبات y , z

٧ــ قانون ترتيب الحدود The Associative Law

و يصـــح كـــذلك قانون ترتيب الحدود في المتجهات لا ن

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \left[A_x + (B_x + C_x),\ A_y + (B_y + C_y),\ A_z + (B_z + C_z)\right]$$

$$= (A_x + B_x) + C_x,\ (A_y + B_y) + C_y,\ (A_z + B_z) + C_z) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

٨ــ قانون توزيـــع الحـــدود The Distributive Law

يصـــح قانون توزيع الحدود عنـــد ضرب المتجهـــات في كمية عددية

لاننا نحصل من (٢) و (٣) على ــ

$$c(\vec{A} + \vec{B}) = c(A_x + B_x,\ A_y + B_y,\ A_z + B_z)$$

$$= c(A_x + B_x),\ c(A_y + B_y),\ c(A_z + B_z)$$

$$= (cA_x + cB_x,\ cA_y + cB_y,\ cA_z + cB_z)$$

$$= c\vec{A} + c\vec{B}$$

اى ان المتجهات تخضع لقوانين الجبر الاعتيادية فيما يخص العمليات انفة الذكر .

١ ـ ٥ مقدار المتجه Magnitude of a Vector

يرمز لمقدار المتجه $\vec{A}$ بالرمز $|\vec{A}|$ اوبـ A ويعرف بالجذر التربيعي لحاصل جمع مربع مركبات المتجه .

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (١ـ١)$$

واخذ الجذر الموجب شيء بديهي في الهندسة يكون مقدار المتجه هو طوله ، اى طول قطر متوازى مستطيلات اضلاعه A_x ، A_y ، A_z .

١ ـ ٦) الوحدات المتجهة للمحاور Unit Coordinate Vectors

المتجه الذى مقداره واحد عدد صحيح يسمى (الوحدة المتجة) والوحدات المتجهة الثلاث

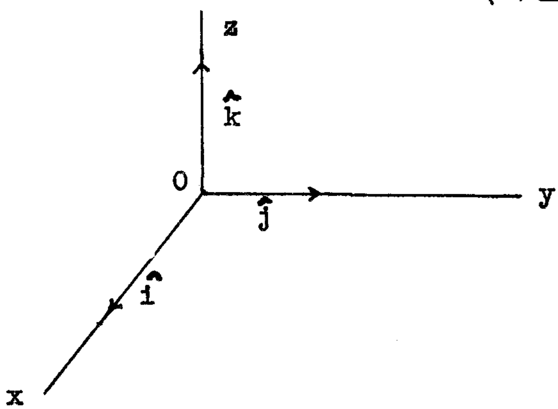
$$\hat{i} = [1,0,0], \quad \hat{j} = [0,1,0], \quad \hat{k} = [0,0,1] \qquad (١ـ٢)$$

تسمى (الوحدات المتجهة للمحاور) او (المتجهات الاساسية) ويمكن تمثيل اى متجه بدلالة هذه المتجهات كمجموع على النحو التالي

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (A_x,A_y,A_z)=(A_x,0,0) + (0,A_y,0 + (0,0,A_z) \qquad (١ـ٣)\\ &= A_x(1,0,0) + A_y(0,1,0) + A_z(0,0,1)\\ &= \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z\end{aligned}$$

ان تمثيل "المجموع" ملائم لاغراض كثيرة وسيستخدم كثيرا وسوف نسميه صيغة ـ ijk لتمثيل المتجه .

وتعرف اتجاهات الوحدات المتجهة بواسطة نظام الاحداثيات (الشكل ١ ـ ٢)



الشكل (١ ـ ٢) الوحدات المتجهة للاحداثيات ijk.

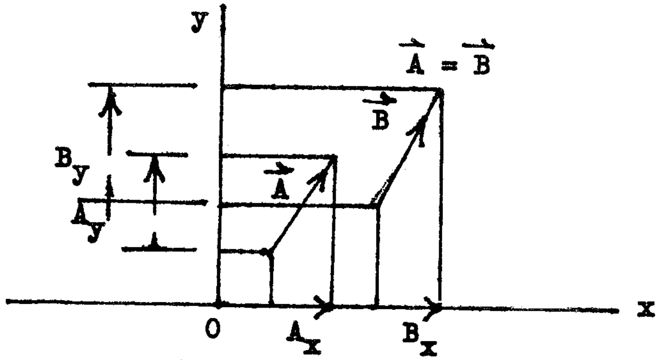
وهي تكون ثلاثي اليد ـ اليمنى او اليسرى ويتوقف ذلك على نوع المحاور المستخدمة واعتياديا تستخدم محاور اليد اليمنى ، وهي المحاور المبينة في الشكل (١ ـ ٢) .

(١ـ٧) المعنى الهندسي لجبر المتجهات
Geometric Meaning of Vector Operations

اذا فرضنا ان المتجهة يمثل بمستقيم طوله واتجاهه معلومان ، فيمكن ببساطة التحقق من ان التعاريف التي ذكرنا نصوصها توا لها التفاسير البسيطة التالية :

١ ـ تساوي المتجهات Equality of Vectors

اذا تساوى متجهان ، فانهما عندئذ يكونان متوازيين ولهما نفس الطول ولكن ليس من الضروري ان يكون لهما نفس الموضع . والشكل (١ ـ ٣) يبين متجهين متساويين حيث رسمت مركبتان فقط لكل منهما للوضوح .

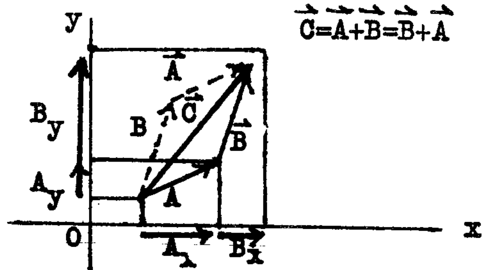


الشكل (١ ـ ٣) يوضح المتجهات المتساوية

لاحظ ان المتجهين يكونان ضلعين متقابلين لمتوازى الاضلاع (كما انه ليس من الضرورى ان تكون المتجهات المتساوية متكافئة في جميع النواحي ٠٠ فمثلا حتى اذا تساوى متجها قوتين توءثران في نقطتين مختلفتين في جسم فأن كلا منهما قد تولد تأثيرا ميكانيكيا يختلف عن تاثير الاخرى) ٠

٢ ـ جمع المتجهات Vector Addition

الجمع الا تجاهي لمتجهين يساوى الضلع الثالث لمثلث ٠ ضلعاه الاخران يساويان المتجهين المعنيين ٠ الشكل (١ـ٤) يوضح جمع المتجهات * كذلك يعين

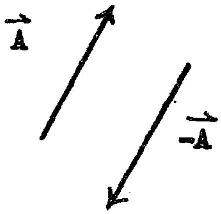


الشكل (١ـ٤) الجمع لمتجهين

الجمع بقاعدة متوازى الاضلاع كما هو مبين في نفس الشكل . (يعرف جمع المتجهات من ناحية ثانية طبقا للتعريف (١ـ٤) (٢) حتى لو لم يكن للمتجهات نقطة مشتركة)

٣ ـ ضرب المتجه بكمية عددية Multiplication of a Vaotor by a Scalar

المتجه $c\vec{A}$ يوازى المتجه $\vec{A}$ وطوله c مرة اكبر من $\vec{A}$
عندما يكون $c = -1$ يعني ان اتجاه $-\vec{A}$ هو معكوس اتجاه $\vec{A}$
كما هو مبين في الشكل



الشكل (١ ـ ٥) السالب للمتجه

١ـ٨) الضرب العددى The Scalar Product

الضرب العددى لاى متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثل بالرمز $\vec{A}\cdot\vec{B}$
ويقرأ (A dot B) وهو كمية عددية تعرف بالمعادلة التالية :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (١ـ٤)$$

وينتج من التعريف المذكور انفا ان

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (١ـ٥)$$

لان $A_xB_x = B_xA_x$ وهلم جرا وينتج كذلك ما يلي :ـ

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \qquad (١ـ٦)$$

لاننا اذا استخدمنا التعريف (١ـ٤) بالتفصيل نحصل على :ـ

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = A_x(B_x + C_x) + A_y(B_y + C_y) + A_z(B_z + C_z)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

نتذكر من الهندسة التحليلية العلاقة التالية لجيب تمام الزاوية المحصورة بين مستقيمين والتي هي :ـ

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \; (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستعمال المعادلتين (١ ـ١) و (١ ـ٤) يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي :ـ

$$\cos \theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

او

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB \cos \theta \qquad (١ ـ ٧)$$

يمكن اعتبار العلاقة السابقة كتعريف آخر للضرب العددى . هندسيا $\vec{A}\cdot\vec{B}$ تساوى طول مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ مضروبا في طول $\vec{B}$.

اذا كان الضرب العددى $\vec{A}\cdot\vec{B}$ يساوى صفرا ، عندئذ يكون $\vec{A}$ عموديا على $\vec{B}$ ، على الا يكون اى من $\vec{A}$ او $\vec{B}$ مساويا للصفر .

ان مربع مقدار المتجه $\vec{A}$ ينتج من ضرب المتجه $\vec{A}$ في نفسه عدديا . اى ان $A^2 = |\vec{A}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$

من تعاريف الوحدات المتجهة للاحداثيات $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ يمكن التحقق من صحة العلاقات التالية بسهولة ..

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \qquad (١ ـ٨)$$

لنفرض ان عـددا من قوى متلاقيـــة في نقطـــة واحـــدة
مثـل $\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \ldots\ldots\ldots , \vec{F}_n ,$
تؤثر على جسـيم عندئذ يكون شـرط التوازن السـكوني للجســيم
اى الشـرط الذى فيه الجسـيم سـاكنا تحت تأثير هذه القوى ، هو ان يكـون
مجموعهـا الاتجاهي يسـاوى صفرا ٠ اى ــ

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

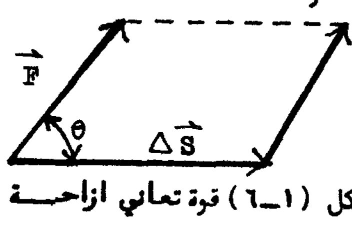
اذا مثلنا مركبـة $\vec{F}_1$ باتجـاه المحور ــ x بالرمز X_1 وهلم جـــرا ،
عندئذ تكون معادلة التوازن المذكـورة اعـلاه مكافئـة للمعادلات الثلاث التالية

$$\sum X_i = 0$$
$$\sum Y_i = 0$$
$$\sum Z_i = 0$$

كما هو جلي من تعريف جمع المتجهات الذى سـبق توضيحـه في البنـــد
١ــ٤ (٢) ٠ اذا كانت جميع القوى معروفة باسـتثناء واحـدة منها فيمكن
ايجـاد مركبات هـذه القوة المجهولة من حل معادلات التوازن المذكورة اعلاه

٢ــ الشـــغل Work

افرض ان جسـما قد ازيـح خطيا $\Delta \vec{S}$ بتاثير قـوة ثابتـة $\vec{F}$ ،
كما هو مبين في الشـكل (١ــ٦) فالشغل ΔW يساوى حاصل ضـــرب
مركبة القوة $\vec{F}$ باتجاه الازاحـة $\Delta \vec{S}$



الشكل (١ــ٦) قوة تعاني ازاحـــة

(١ــ٩) بعض تطبيقات المتجهات Some Applications of Vectors

١ــ تـوازن جسـيم Equilibrium of a Particle

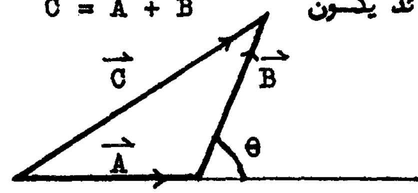
في مقـدار الازاحـة ΔS اى $\Delta W = (F \cos \theta)\, \Delta S$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{F}$ و $\Delta \vec{S}$ • ولكن الطرف الايمن عبارة عـــن الضرب العـــددى للقوة $\vec{F}$ في الازاحـة $\Delta \vec{S}$ اى $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{S}$

٣ــ قانون الجيب تمام Law of Cosines

يمثل الشكل (١ــ٧) مثلثا اضلاعه المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$

عندئذ يكـون $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



الشكل (١ــ٧) قانون الجيب تمام

وبضرب المتجـه $\vec{C}$ في نفسـه عدديا نحصل على

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} + \vec{B})$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{A} + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B}$$

والخطوة الثانية تنتـج من تطبيق القوانين في المعادلات (١ ــ ٥) و (١ ــ ٦) واستبدال $\vec{A}\cdot\vec{B}$ بما يساويه $AB \cos \theta$ اى $C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2$ وهذا هو قانـــون الجيب تمام المعروف •

(١ــ ١٠) الضرب الاتجاهي The Vector Product

يمثل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمـــز $\vec{A} \times \vec{B}$ ويقـرأ ($\vec{A}$ cross $\vec{B}$) ويعرف بالمتجـه الذى مركباتـه تعطـــــى بالمعادلة التاليـة :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y\ ,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x) \quad (١ــ٦)$$

سيبحث التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي في البند (١ ــ ١٢) و
يمكن البرهنة على ان القواعد التالية تصح في الضرب الاتجاهي : ــ

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (١ـ١٠)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad (١ـ١١)$$

$$n(\vec{A} \times \vec{B}) = (n\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (n\vec{B}) \qquad (١ـ١٢)$$

وبرهنتها تأتي مباشرة من التعريف وقد تركت كتمرين

وفقا للتعاريف الجبرية للوحدات المتجهة للاحداثيات ــ المعادلة (١ ــ ٢)
نستطيع ان نثبت صحة العلاقات التالية للضرب الاتجاهي بسهولة

$$\begin{aligned} &\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ &\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j} \\ &\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i} \qquad (١ـ١٣) \\ &\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k} \end{aligned}$$

فمثلا

$$\hat{i} \times \hat{j} = (0-0,\ 0-0,\ 1-0) = (0,0,1) = \hat{k}$$

ويمكن بسهولة برهنة بقية المعادلات بنفس الاسلوب ٠

(١ـ١١) التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي

Geometric Interpretation of the Cross Product

ان تمثيل الضرب الاتجاهي بصيغة ــ ijk

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

وكل حد داخل الاقواس مساو الى محدد ، اى

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{j}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

واخيرا

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (١ــ١٤)$$

وبفك المحدد يمكن التحقق من صحته بسهولة • وصيغة المحدد اداة ملائمة تساعدنا على تذكر تعريف الضرب الاتجاهي •من خواص المحددات يمكن على الفور معرفة ما اذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ اى ما اذا كان $\vec{A} = \alpha\vec{B}$ وذلك عندما يكون الصفان الاخيران من المحدد متناسبين اى تكون قيمة المحدد تساوى صفرا •

اذن يكون الضرب الاتجاهي لمتجهين متوازيين يساوى صفرا • لنحسب مقدار الضرب الاتجاهي عندنا :ــ

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = (A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2$$

وبقليل من الصبر يمكن تبسيطها الى الشكل التالي

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = (A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2$$

او من تعريف الضرب العددى • يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

وباخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة وباستخدام المعادلة (١ ـ٧) نستطيع ان نكتب مقدار الضرب الاتجاهي على النحو التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = AB \sin\theta \qquad (١ - ١٥)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

لتفسير الضرب الاتجاهي هندسيا نلاحظ ان المتجه $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ يكون عموديا على كل من $\vec{A}$, $\vec{B}$ لان

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

$$= A_x(A_yB_z - A_zB_y) + A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x) = 0$$

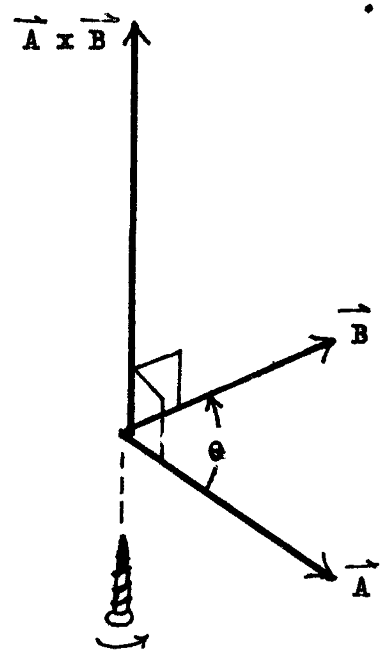
وبالمثل $\vec{B}\cdot\vec{C} = 0$ اذن المتجه $\vec{C}$ يكون عموديا على المستوى الذي يحوى المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

ان اتجاه المتجه $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ يعين من فرضية كون المتجهات الثلاث $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ تشكل ثلاثي اليد اليمنى كما هو واضح من الشكل (١ ـ٨) . (هذا ينسجم مع النتيجة التي برهنت سابقا ، فمن ثلاثي اليد ـ اليمنى ijk حصلنا على ($\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$) . اذن نستطيع ان نكتب من المعادلة (١ ـ١٥) ما يلي

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin\theta)\vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ تمثل الوحدة المتجهة العمودية على مستوى المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويعين اتجاه $\vec{n}$ من قاعدة اليد اليمنى ، اى ، في اتجاه تقدم لولب (برغي) أيمن يدور من الاتجاه الموجب للمتجه $\vec{A}$ الى $\vec{B}$ خلال الزاوية المحصورة بينهما ، كما هو مبين

في الشكل (١ ــ ٨) ويمكن اعتبار المعادلة (١ــ١٦) كتعريف آخــــــــر للضرب الاتجـاهي •



الشكل (١ــ٨) الضرب الاتجاهي

امثلـــــــــــــة

١ـ اذا علمت ان $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

جـــد $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)\ (1) + (1)\ (-1) + (-1)\ (2) = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2-1) + \hat{j}(1-4) + \hat{k}(-2-1)$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

٢ـ جـد الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$, $\vec{B}$

من تعريف الضرب العددى نعلم ان

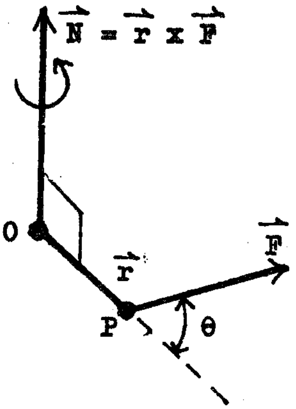
$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{-1}{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)^{\frac{1}{2}}\ (1^2 + (-1)^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{6^{\frac{1}{2}}\ 6^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{6}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right) = 99.6^{\circ}$$

(١-١٢) عـزم القـوة Moment of a Force

من التطبيقات المفيدة وبصورة خاصـة للضرب الاتجاهي هو تمثيل العزم لنفرض ان القوة $\vec{F}$ تؤثر في النقطـة $P(x, y, z)$ ، كمـا هو مبين في الشـكل (١-٩). ولنمثل المتجـه $\overrightarrow{OP}$ بالرمز $\vec{r}$ اى ان



الشكل (١-٩) ، عزم القوة

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

ويعرف العزم $\vec{N}$ حول نقطة معلومة مثل O بالضرب الاتجاهي

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (١-١٧)$$

اى ان عزم القوة حول نقطـة ما هو كمية اتجاهية لها مقدار واتجـاه ، اذا سـلطت قوة منفردة في النقطـة P لجسـم حـر الدوران حول محـور ثابت لـه في النقطـة O ، عندئذ يـظهر الجسـم ميلا للدوران ، ولمـا كان محور هذا الدوران عموديا على القوة $\vec{F}$ وعلى المسـتقيم OP اذن يكـون اتجـاه العـزم $\vec{N}$ على طول محور الدوران ،

المعادلة التالية تعطي مقدار العـزم

$$|\vec{N}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \theta \qquad (١٨_١)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ • اذن يمكن اعتبار $|\vec{N}|$ مســـاوية لحاصل ضرب مقدار القوة في الكميـة $r\sin \theta$ والاخيرة تمثل المسافة العمودية من النقطـة O على خط تأثير القوة •

عندما تؤثر عدة قـوى في نقاط مختلفـة من جسـم منفرد تجمع العـزوم بطريقـة جمع المتجهات وهذا ينتج من قانون توزيع الحـدود لضـرب المتجهات اى من المعادلة (١٠_١١) ومن شـرط التوازن للحركـة الدورانية يكون المجموع الاتجاهي لجميع العزوم يسـاوى صفرا • أى

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{N}_i = 0$$

ان هذا الموضوع سـيبحث فيما بعد بصورة وافية في الفصل الثامن •

(١_١٣) تمثيل متجـه معلـوم كحاصل ضرب كميـة عدديـة ووحـــدة متجهـة منفـردة •

Representation of a Given Vector as the Product of a Scalar and a single Unit Vector

افرض المعادلة $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

اضرب واقسـم الطرف الايمن بمقـدار $\vec{A}$

$$\vec{A} = A\left(\hat{i}\frac{A_x}{A} + \hat{j}\frac{A_y}{A} + \hat{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

الان

$$\frac{A_x}{A} = \cos\alpha , \quad \frac{A_y}{A} = \cos\beta , \quad \frac{A_z}{A} = \cos\gamma$$

حيث α , β , γ تمثل زوايا اتجاه A لذلك يمكننا كتابة

$$\vec{A} = A(i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma)$$

$$= A(\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma)$$

او

$$\vec{A} = A\vec{n} \qquad (١\_١٩)$$

حيث $\vec{n}$ تمثل وحدة متجهة مركباتها هي $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

افرض اى متجه اخر مثل $\vec{B}$

من الواضح ان مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو

$$B \cos\theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A} = \vec{B}.\vec{n} \qquad (١\_٢٠)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

مثال

جد وحدة متجهة عمودية على المستوى الذى يحوى المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k} \qquad \vec{B} = \hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$$

من المثال (١) عندنا ـ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}-3\hat{k}$$

اذن

$$n = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\hat{i}-3\hat{j}-3\hat{k}}{(1^2 + 3^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{j}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{k}}{\sqrt{19}}$$

(١-١٤) الضرب الثلاثي Triple Products

يسمى التعبير $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ بالضرب العددى الثلاثي للمتجهات $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. وهو كمية عددية لانه ضرب عددى لكميتين متجهتين وعند الرجوع الى محدد ضرب المتجهات المعادلة (١-١٤) ، نرى من الممكن كتابة الضرب العددى الثلاثي على النحو التالي

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (١-٢١)$$

عند تبادل صفين او عمودين في محدد تتغير اشارته ولكن لا تتغير قيمته المطلقة ، من هذه الخاصية المعروفة للمحددات نستطيع ان نشتق بسهولة المعادلة المفيدة التالية

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C} \qquad (١-٢٢)$$

اى يمكن تبادل علامة الضرب العددى وعلامة الضرب الاتجاهي في الضرب الاتجاهي الثلاثي

يسمى التعبير

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

بالضرب الاتجاهي الثلاثي Triple Vector Product

وقد تركنا للطالب البرهنة على صحة المعادلة التالية لضرب المتجهات الثلاثي :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C} \qquad (١-٢٣)$$

١ ـ ١٥) • تغيير نظام الاحداثيات Change of Coordinate System

افرض ان المتجه $\vec{A}$ قد مثل بدلالة الثلاثي ijk على النحو التالي :ـ

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

ومثل نفس المتجه $\vec{A}$ بدلالة ثلاثي جديد $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$ اتجاهه يختلف عن اتجاه $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ على النحو التالي :ـ

$$\vec{A} = \hat{i}'A_x' + \hat{j}'A_y' + \hat{k}'A_z'$$

الان الضرب العددى $\vec{A}.\hat{i}'$ عبارة عن A_x' اى مسقط $\vec{A}$ على الوحدة المتجه $\hat{i}'$ وهكذا يمكننا كتابة

$$A_x' = \vec{A}.\hat{i}' = (\hat{i}.\hat{i}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{i}')\ A_y + (\hat{k}.\hat{i}')\ A_z$$

$$A_y' = \vec{A}.\hat{j}' = (\hat{i}.\hat{j}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{j}')\ A_y + (\hat{k}.\hat{j}')\ A_z \qquad (١ ـ ٢٤)$$

$$A_z' = \vec{A}.\hat{k}' = (\hat{i}.\hat{k}')\ A_x + (\hat{j}.\hat{k}')A_y + (\hat{k}.\hat{k}')A_z$$

وقد سمي الضرب العددى ($\hat{i}.\hat{i}'$) و ($\hat{i}.\hat{j}'$) وهلم جرا بمعامل التحويل Coefficients of Transformation وهي تساوى جيوب تمام الزوايا بين المحاور ذات الفتحه وبين التي بدون فتحه •

وبالتماثل يعبر عن مركبات المحاور الاخيرة على النحو التالي :ـ

$$A_x = \vec{A}.\hat{i} = (\hat{i}'.\hat{i})A_x' + (\hat{j}'.\hat{i})A_y' + (\hat{k}'.\hat{i})A_z'$$

$$A_y = \vec{A}.\hat{j} = (\hat{i}'.\hat{j})A_x' + (\hat{j}'.\hat{j})A_y' + (\hat{k}'.\hat{j})A_z' \qquad (١ ـ ٢٥)$$

$$A_z = \vec{A}.\hat{k} = (\hat{i}'.\hat{k})A_x' + (\hat{j}'.\hat{k})A_y' + (\hat{k}'.\hat{k})A_z'$$

ان جميع معاملات التحويل في المعادلات (١ ـ ٢٥) قد ظهرت في المعادلات (١ ـ ٢٤) لان $\hat{i}.\hat{i}' = \hat{i}'.\hat{i}$ وهلم جرا •

ولكن تلك التي في صفوف معادلات (١ـ٢٥) قد ظهرت في اعمدة حدود ـ معادلات (١ـ٢٤) وبالعكس •

ان قوانين التحويل التي عبرت عنها هاتان المجموعتان من المعادلات هي خواص عامة للمتجهات ، وهما تكونان في الحقيقة طريقة اخرى لتعريف المتجهات [٤] •

ان رمز المصفوف Matrix يمكن ان يعبر عن معادلات التحويل بصورة ملائمة حيث تكتب المعادلات (١ـ٢٤) على الشكل التالي :ـ

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}\cdot\hat{i}' & \hat{j}\cdot\hat{i}' & \hat{k}\cdot\hat{i}' \\ \hat{i}\cdot\hat{j}' & \hat{j}\cdot\hat{j}' & \hat{k}\cdot\hat{j}' \\ \hat{i}\cdot\hat{k}' & \hat{j}\cdot\hat{k}' & \hat{k}\cdot\hat{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (١ـ٢٦)$$

ويسمى المصفوف ٣ في ٣ المذكور توا بمصفوف التحويل ومن فوائده امكانية استخدام عدة تحويلات متتابعة بسهولة وذلك بضرب مصفوف كل تحويل في الاخر •

امثلة

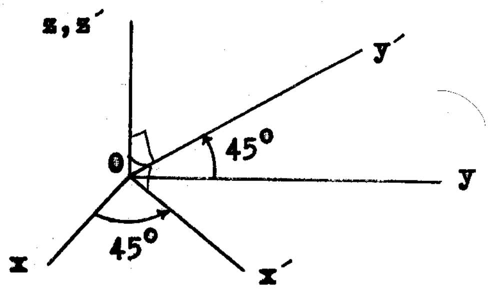
١ـ مثل المتجه $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ بدلالة الثلاثي $\hat{i}'\ \hat{j}'\ \hat{k}'$ افرض ان المحورين x' و y' دارا بزاوية ٤٥ حول المحور ـ z ويتطابق المحوران z و z'

---

(٤) انظر على سبيل المثال

L. P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953

كما هو مبين في الشكل (١ ـ ١٠) وبالرجوع الى الشكل



الشكل (١ ـ ١٠) دورت المحاور ذات الفتحة $0x'y'z'$ بزاوية ٤٥° حول المحور ـ z.

تحسب معامل التحويل كالاتي : ـ

$$\hat{i}.\hat{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{j}.\hat{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{k}.\hat{i}' = 0$$

$$\hat{i}.\hat{j}' = -1/\sqrt{2} \qquad \hat{j}.\hat{j}' = 1/\sqrt{2} \qquad \hat{k}.\hat{j}' = 0$$

$$\hat{i}.\hat{k}' = 0 \qquad \hat{j}.\hat{k}' = 0 \qquad \hat{k}.\hat{k}' = 1$$

هذه تعطي

$$A_{x'} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$A_{y'} = \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad A_{z'} = 1$$

وبذلك يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$ بدلالة المحاور ذات الفتحة على النحو التالي : ـ

$$\vec{A} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\hat{i}' - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{j}' + \hat{k}'$$

٢ ـ جد مصفوف التحويل عند دوران المحاور ذات الفتحة بزاوية θ حول المحور-z (المثال السابق حالة خاصة لهذه الحالة) · عندنا

$$\hat{i}.\hat{i}' = \hat{j}.\hat{j}' = \cos\theta$$
$$\hat{j}.\hat{i}' = -\hat{i}.\hat{j}' = \sin\theta \quad , \quad \hat{k}.\hat{k}' = 1$$

وكل ضرب عددي اخر يساوي صفرا · اذن مصفوف التحويل يكون

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمارين

١ ـ ١ من المتجهين $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}.$

جد

(آ) قيمة $|\vec{A} - \vec{B}|$

(ب) قيمة $\vec{A} \cdot \vec{B}$

(جـ) الزاوية بين $\vec{B}\ ,\ \vec{A}$

١ ـ ٢ لنفس المتجهين في التمرين (١ ـ ١) عبر بصيغة ijk عما يلي :ـ

(آ) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

(ب) $\vec{A} \times \vec{B}$

(جـ) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

١ ـ ٣ اذا كان المتجه $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ عموديا على المتجه $2i - 3j + qk$

ما هي قيمة q ؟

١ ـ ٤ جد طول مسقط المتجه $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ على المتجه $- 3\hat{j} + 4\hat{k}$

١ ـ ٥ جد قيمة

$$[(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{i} + \hat{k})] \cdot [(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k})].$$

١ـ٦ اذا علمت ان $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}\ ,\ \vec{B}=2\hat{j}+3\hat{k}\ ,\ \vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

جد

(آ) $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}\ ,\ \vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$

(ب) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}\ ,\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

١ـ٧ سلطت القوة $\vec{F_1} = \hat{i} + \hat{j}$ على جسم في النقطة P_1 بحيث كان المتجه $\vec{OP_1}= \vec{r_1} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ثم سلطت قوة ثانية $\vec{F_2} = \hat{j} - \hat{k}$ في النقطة $\vec{r_2} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ جد العزم الكلي N ، مقدار N وزوايا جيوب تمام محصلة محور الدوران ؟

١ـ٨ برهن المتطابقة التالية

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\ \vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

١ـ٩ اذا كان المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثلان ضلعين متلاقيين من متوازى اضلاع . برهن على ان مساحة متوازى الاضلاع تساوى $|\vec{A} \times \vec{B}|$

١ـ١٠ برهن بطريقة جبر المتجهات ان الزاوية المرسومة داخل نصف دائرة تكون قائمة .

١ـ١١ برهن قانون الجيوب في المثلثات باستخدام جبر المتجهات .

١ـ١٢ اذا كانت المتجهات $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ تمثل ثلاثة اضلاع متلاقية لمتوازي مستطيلات . برهن على ان حجم متوازى المستطيلات يساوى

$$\left[\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})\right]$$

١ـ١٣ مثل المتجه $\hat{i} + \hat{j}$ بدلالة الثلاثي $i'j'k'$ عندما يدور المحوران x' , z' حول المحور ـ y (الذى ينطبق على المحور ـ y') بزاوية ٦٠ درجة .

١ـ١٤ برهن على ان مقـدار المتجهـة لا يتغير بالدوران ٠ اســـتخدم المصفـوف

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لدوران حـول المحـور ـ z بزاوية مقدارها θ .

١ـ١٥ جـد مصفوف التحويل لدوران حول المحور ـ z بزاويـــة θ يتبعـه دوران آخر حول المحور ـ y' بزاويـة ϕ ٠

١ـ١٦ المجموعتان من المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ تســـمى متبادلـة اذا كان $\vec{a}.\vec{a}' = \vec{b}.\vec{b}' = \vec{c}.\vec{c}' = 1$

وكل ضرب عددي مختلط مثل $\vec{a}.\vec{b}' = 0$ برهن على ان

$$\vec{c}' = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{Q}, \quad \vec{a}' = \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{Q}, \quad \vec{b}' = \frac{(\vec{c} \times \vec{a})}{Q}$$

حيث $Q = \vec{a}. (\vec{b} \times \vec{c})$

١ـ١٧ جـد مجموعة متجهـات تكون متبادلة مع المجموعة $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

الفصـــل الثانـــي
تفاضل وتكامل المتجهـــات وعلم الحركة

في هذا الفصل سنطور شكليـــة علم الحركة المجردة لوصف حركة الجسيـــم وهذه المعالجة ستبسط كثيرا باستعمال علم التفاضل والتكامل المطبقة على الكميـــات المتجهـــة .

٢ـ ١) مشتقـــة المتجه Derivative of a Vector

افرض ان مركبات المتجه $\vec{A}$ هي دوال لمتغير واحد مثل u ، والمتجـــه قـــد يمثل مـــوضعا او سرعة او ما الى ذلك ويمثل البرامتر u " Parameter " اعتياديا الزمن t ، وقد تكون اية كميـــة اخرى تعين مركبات المتجه $\vec{A}$.

$$\vec{A}(u) = \hat{i}A_x(u) + \hat{j}A_y(u) + \hat{k}A_z(u)$$

وتعرف مشتقة المتجه $\vec{A}$ بالنسبة للكميـــة u بصورة مماثلة تماما لتعريـــــف التفاضل الاعتيادى لدوال الكميات العددية بواسطة الغاية Limit نحصل على

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \underset{\Delta u \to o}{\text{limit}} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \underset{\Delta u \to o}{\text{limit}} \left(\hat{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \hat{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \hat{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

حيث $\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$ وهلم جرا . اى ان

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \hat{i} \frac{dA_x}{du} + \hat{j} \frac{dA_y}{du} + \hat{k} \frac{dA_z}{du} \qquad (٢ـ١)$$

اذن مشتقة المتجه هي متجه اخر مركباته مشتقات اعتيادية .

يتضح من المعادلة السابقة ان مشتقة مجموع متجهين تساوى مجموع مشتقـــة كل منهما اى :

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ـ٢)$$

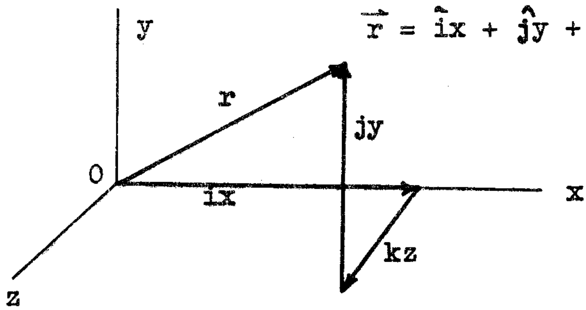
وستعالج قواعد تفاضل ضرب المتجهات بعدئذ في البند (٢ـ٧)

(٢ـ٢) متجه الموضع لجسيم Position Vector of a particle

في محاور مرجعية معينة ،يمكن تعيين موضع جسيم بصورة كاملة بمتجه واحـــد

اى ازاحة الجسيم بالنسبة الى نقطة اصل المحاور • وهذا المتجه يسمى متجه الموضع Position Vector للجسيم• في المحاور الديكارتيه المبينة في الشكل • (٢ـ١) يكون متجه الموضع بكل بساطه هو

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (٢ـ٣)$$



الشكل (٢ـ١) متجه الموضع

ومركبات متجه الموضع لجسيم متحرك تكون دوال للزمن ، اى

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t)$$

(٢ـ٣) متجه السرعـة The Velocity Vector

بينا في البند (٢ـ ١) التعريف الاصولي لتفاضل اى متجه بالنسبة لاى برامتر وبصورة خاصة اذا كان المتجه هو متجه الموضع $\vec{r}$ لجسيم متحرك والبرامترهو الزمن t ، وتفاضل $\vec{r}$ بالنسبة للزمن t يسمى " السرعة "والتي سوف نرمز لها بالحرف $\vec{v}$ • اذن

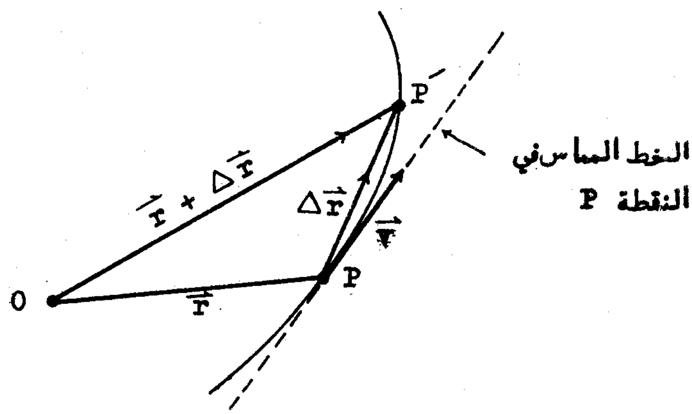
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} \quad (٢ـ٤)$$

حيث النقاط تمثل التفاضل بالنسبة للزمن t • (ان هذا الاصطلاح قياسي وسوف يستعمل من اول الكتاب الى اخره) • ولنختبر المعنى الهندسي لمتجه السرعة افرض ان جسيما كان في موضع معين في الزمن t وبعد مرور فترة زمنية

مقدارها " Δt "تحرك الجسيم من الموضع(t) $\vec{r}$ الى الموضع(Δt + t) $\vec{r}$ ٠
نمتجه الازاحة خلال الفترة الزمنية t هو

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)$$

لذلك يكون خارج القسمة Δt / $\Delta\vec{r}$ متجها موازيا للازاحة٠ وكلما افترضنا فترات زمنيـة اصغر فاصغر اقترب خارج القسمة $\Delta\vec{r} / \Delta t$ من الغاية $d\vec{r} / dt$ والتي تسمى بالسرعة ٠ والمتجه $d\vec{r} / dt$ يمثل اتجاه الحركة ومعدلها الزمني كما هو موضح في الشكل التخطيطي (٢ـ٢) فـي الـفـتـرة الـزمنيـة Δt



(الشكل ٢ـ٢) متجه الازاحة لجسيم متحرك

يتحـــرك الجســـم على طول المسار من النقطة P الــى P´ ٠
وعندما تقترب Δt من الصفر تقترب النقطة P´ من P وبذلك يقترب اتجـــاه المتجه $\Delta\vec{r} / \Delta t$ من اتجاه المماس للمسار في P ٠ نمتجه السرعة اذن يكون دائما مماسا لمسار الحركة ٠

يسمى مقدار السرعة بالانطلاق Speed وبدلالة المركبات المتعامدة يكون الانطلا على الشكل التالي :ـ

$$v = \left|\vec{v}\right| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (٢-٥)$$

اننا نستطيع ان نعبر عن الانطلاق بطريقة اخرى اذا مثلنا المسافة العددية على طول المسار بالرمز s وذلك على النحو التالي :

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

والتي عند تبسيطها تصبح مساوية للمقدار الجبرى ليمين المعادلة (٢ــ٥) .

(٢ــ٤) متجه التعجيل Acceleration Vector

ان مشتقة السرعة للزمن تسمى التعجيل ، وتمثيله بالرمز $\vec{a}$ يكون عندنا

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (٢\text{ـ}٦)$$

وبدلالة المركبات المتعامدة

$$\vec{a} = \hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z} \qquad (٢\text{ـ}٧)$$

اى ان التعجيل كمية متجهة مركباته بدلالة المحاور المتعامدة هي المشتقة الثانية لاحداثيات موضع الجسيم المتحرك . وسوف نشرح تحليل التعجيل $\vec{a}$ الى مركباته المماسة والعمودية في البند (٢ــ٨) .

امثلة

١ــ لنختبر الحركة الممثلة بالمعادلة -

$$\vec{r}(t) = \hat{i}bt + \hat{j}\left(ct - \frac{gt^2}{2}\right) + \hat{k}0$$

لما كانت مركبة ــ z ثابته وتساوى صفرا ، فالمعادلة تمثل حركة في المستوى ــ xy .

ونحصل على السرعة $\vec{v}$ عند تفاضل $\vec{r}$ بالنسبة للزمن t ، اى ..

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b + \hat{j}(c - gt)$$

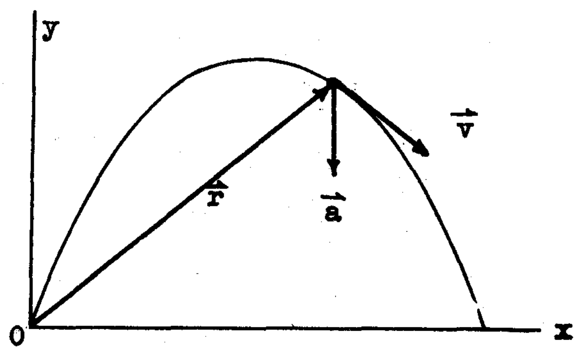
وبتفاضلها للمرة الثانيـة نحصل على التعجيل ، اى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{j}g$$

اى ان $\vec{a}$ يكون بالاتجاه السالب للمحـور ـ y ٠ وله المقدار الثابت g ٠ ومسـار الحركة يكون قطعا مكافئا كما هو مبين في الشكل (٢ـ٣) ٠

(ان هذه المعادلـة تمثل في الحقيقة حركة القذيفة) ٠ ويتغير الانطـلاق v مع t وفقا للمعادلة التاليـة :

$$v = \left[b^2 + (c - gt)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



الشكل (٢ـ٣) متجهات الموضع والسرعة والتعجيل
لجسيم يتحرك على مسار قطـع مكافـــــــــي ٠

٢ـ افرض ان متجه الموضع لجسيم هو

$$\vec{r} = \hat{i}b \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t + \hat{k}c$$

ولنحلل الحركة ٠ المسافة من نقطة الا صل والتي

$$|\vec{r}| = r = (b^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + c^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

وعند تفاضل $\vec{r}$ ،نجـد ان :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b\omega\cos\ \omega t - \hat{j}b\omega\sin\omega t + \hat{k}o$$

ولما كانت مركبـة السرعة $\vec{v}$ باتجاه المحور z تساوى صفرا ، فمتجه السرعة يكون موازيا للمستوى xy ، والجسيم يقطع مساره بانطلاق ثابت ، اى

$$v = |\vec{v}| = (b^2\omega^2\ \cos^2\omega t + b^2\omega^2\ \sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}} = b\omega$$

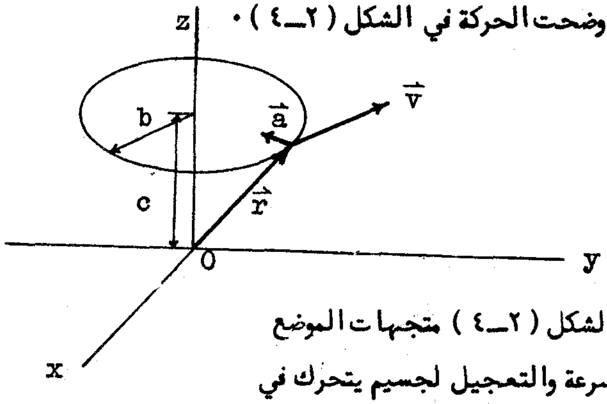
والتعجيل

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{i}b\omega^2\ \sin\omega t - \hat{j}b\omega^2\ \cos\omega t$$

يكون عموديا على السرعة ،لان الضرب العددى للسرعة $\vec{v}$ والتعجيل $\vec{a}$ يساوى صفرا ،اى

$$\vec{v}.\vec{a} = (b\omega\cos\omega t)(-b\omega^2\ \sin\omega t)+(-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^2\cos\omega t)=0$$

بالاضافة الى ذلك فأن التعجيل يكون عموديا على المحور z كما هو واضح في الشكل لان $\vec{a}.\vec{k} = 0$ والمسار الفعلي هو دائرة نصف قطرها b وتقع في المستوى $z = c$ وقد وضحت الحركة في الشكل (٢ــ٤) ·



الشكل (٢ــ٤) متجهات الموضع والسرعة والتعجيل لجسيم يتحرك في دائرة

٢ــ٥ تكامل المتجه Vector Integration

افرض ان مشتقة المتجه $\vec{r}$ بالنسبة للزمن اعطيت بدلالة المحـــاور

الديكارتيــه وان مركباتها دوال معلومة للزمن ، اي ان

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}f_1(t) + \hat{j}f_2(t) + \hat{k}f_3(t)$$

وعند تكاملها بالنسبة للزمن t نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i}\int f_1(t)dt + \hat{j}\int f_2(t)dt + \hat{k}\int f_3(t)dt \qquad (٢\text{ـ}٨)$$

ان هذه العملـية بطبيعة الحال تماما عكس عملـية ايجاد متجه السرعة عند مـا يكون متجه الموضع معلوما كدالـة للزمن • وينطبق الشيء نفسه على الحالة التي يكون فيها التعجيل معـروفا كدالـة للزمن فالتكامل يعطي السرعة •

مثـال

اذا علمت ان متجه السرعة لجسيم متحرك هو $\vec{v} = \hat{i}A + \hat{j}Bt + \hat{k}Ct^{-1}$ حيث C, B, A هي ثوابـت • جد $\vec{r}$ •

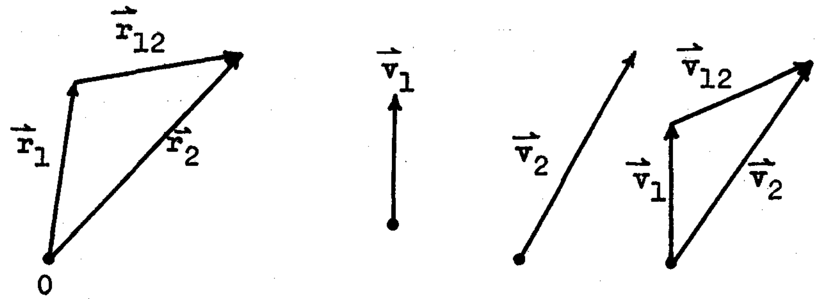
بالتكامل نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i}\int A dt + \hat{j}\int Bt\, dt + \hat{k}\int Ct^{-1}dt$$
$$= \hat{i}At + \hat{j}B\frac{t^2}{2} + \hat{k}C \ln t + \vec{r}_0$$

حيث المتجه $\vec{r}_0$ هو ثابت التكامل •

٢ـ٦) السرعة النسبيــه Relative Velocity

افرض ان متجهي موضع جسيمين هما $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ على التوالي ، كما هو مبيـــن في الشكل (٢ـ٥) •



الشكل (٢ــ٥)

آــ متجه الموضع النسبي　　　　ب ــ متجه السرعة النسبي للجسيمين

ان ازاحة الجسيم الثاني بالنسبة للاول هو الفرق $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ والذى سنسميــه ($\vec{r}_{12}$) .

اذن سرعة الجسيم الثاني بالنسبة للاول هي :

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad (٢ــ٩)$$

التي سنسميها السرعة النسبية . عند نقل $\vec{v}_1$ نحصل على : $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12}$ هذه تمثل السرعة الفعلية للجسيم الثاني بدلالة سرعة الجسيم الاول والسرعـة النسبية للجسيمين .

وعلينا ملاحظة ان مقدار السرعة النسبية للجسيمين لا يساوى تغيير المعـدل الزمني للمسافة بينهما . والكميـة الاخيرة هي :

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{r}_{12}\right| = \frac{d}{dt}\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$$

وهذه تختلف بصورة عامة عن $\left|\vec{v}_{12}\right|$

امثلـــة

١ــ　طائرة تتجه شمالا بسرعة v_a بالنسبة للهواء . فاذا كانت الريح متجهـــة

شرقا بانطلاق v_ω • ما هي الحركة الحقيقية للطائرة ؟ •

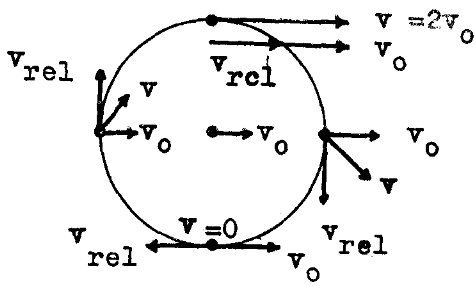
من تعريف السرعة النسبيـة نرى ان السرعة الحقيقية للطائرة بالنسبة للارض هي مجموع متجهي سرعة الهـواء وسرعة الطائرة بالنسبـة للهواء ، اى

$$\vec{v}_{true} = \vec{v}_a + \vec{v}_\omega$$

لنفرض في مسألتنا ان الوحدتين المتجهتين i, j تؤشران باتجاه الشـرق والشمال على التتالي • عندئذ نحصل على

$$\vec{v}_{true} = \hat{i}v_a + \hat{j}v_\omega$$

٢ـ عجلة نصف قطرها b تتدحرج على الارض بانطلاق امامي v_o • جد السرعة لاية نقطة على حافـة العجلة مثل P بالنسبة للارض •



الشكل (٢ـ٦) متجهات السرعة لنقاط مختلفة على العجلة المتدحرجة

اولاـ افرض العلاقـة

$$\vec{r}_{op} = \hat{i}b\cos\theta - \hat{j}b\sin\theta$$

حيث

$$\theta = \omega t$$

هذه تمثل حركة دائريـة باتجاه عقرب الساعة حول نقطة الاصل ، وهي مركز العجلـة في هذه الحالة • فمشتقة الزمن عندئذ تعطي سرعة النقطة P بالنسبة لمركز العجلـة اى :

$$\vec{v}_{rel} = -\hat{i}b\omega\sin\theta - \hat{j}b\omega\cos\theta$$

ولكن السرعة الزاوية بالنسبة للارض هي $\omega = v_o/b$ ولما كانت سرعة مركـــز العجلة هي $\hat{i}v_o$ عندئذ تكون السرعة الحقيقية للنقطة P بالنسبة للارض كالاتي

$$\vec{v} = \hat{i}v_o - \hat{i}b\,\omega \sin\theta - \hat{j}b\,\omega\cos\theta$$
$$= \hat{i}v_o\,(1 - \sin\theta) - \hat{j}v_o\cos\theta$$

والشكل (٢ ــ ٦) يبين متجهات السرع لقيم مختلفة للزاوية θ .

٢ ــ ٧ تفاضل ضرب المتجهات Derivatives of Products of Vectors

نجد من الضروري في احوال كثيرة ان نتعامل مع حاصل الضرب $\vec{A}\times\vec{B},\ \vec{A}\cdot\vec{B},\ n\vec{A}$ حيث الكمية العددية n والكميات المتجهـــه $\vec{B},\vec{A}$ دوال للبرمتر المنفرد u كما في البند (٢ ــ ١) . من التعريف العام للتفاضل عندنـــا .

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{n(u+\Delta u)\,\vec{A}(u+\Delta u) - n(u)\,\vec{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u)\cdot\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\cdot\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u)\times\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\times\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

وبجمع وطرح كميات مثل ($n(u+\Delta u)\,\vec{A}(u)$) في بسوط المعادلات الانفة الذكر نحصل على القوانين التاليـــة

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{du} \qquad (٢ ــ ١٠)$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ ــ ١١)$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} \qquad (٢ ــ ١٢)$$

لا ... ان من الضروری المحافظة على بقاء ترتيب الحدود في الضرب الاتجاهي عند التفاضل وقد تركت الخطوات كتمرين للطالب .

٢ ــ ٨ المركبات المماسة والعمودية للتعجيل

Tangential and Normal Components of Acceleration:

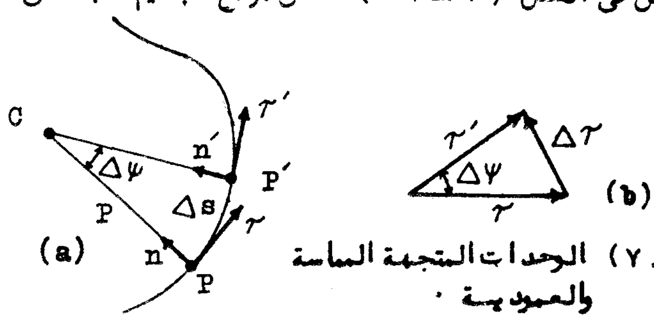
رأينا في البند (١ ــ ١٣) ان اى متجه يمكن تمثيلــه بحاصل ضرب مقداره ووحـــدة متجهة لتعيين اتجاهه . ووفقا لذلك يمكن كتابة متجه السرعة لجسيم متحرك كحاصل لضرب انطلاق الجسيم v في وحدة متجهة τ لتعطى اتجاه حركة الجسيم اى ــ

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \qquad (١٣ \text{ ــ } ٢)$$

ويسمى المتجه τ بالوحدة المتجهه المماسة . عندما يتحرك الجسيم فقد يتغير انطلاقه v وقد يتغير اتجاه τ . لنستخدم قاعدة تفاضل ضرب كمية عددية في اخرى متجهة للحصول على التعجيل . فالنتيجة تكون ــ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\tau) = \dot{v}\tau + v\frac{d\tau}{dt} \qquad (١٤ \text{ ــ } ٢)$$

بالرغم من ان الوحدة المتجهــه لها مقدار ثابت فان لها المشتقة $d\tau/dt$ وهذه بالضرورة يجب ان تعبر عن تغيير اتجاه τ بالنسبة للزمن ، كمــا هو مبين في الشكل (٢ ــ ٧ أ) . كان موضع الجسيم الابتدائي



الشكل (٢ ــ ٧) الوحدات المتجهة المماسة والعمودية .

فى اية نقطة مثل P ثم تحرك مسافة Δs على طول مساره الى نقطة اخرى مثل P' فى مدة زمنية مقدارها Δt . ولنمثل الوحدات المتجهة **للمماسات** فى P و P' **بالرموز** $\vec{\tau}$ و $\vec{\tau}'$ على التتالى كما هو مبين فى الشكل . ويختلف اتجاه هاتين الوحدتين المتجهتين بزاوية $\Delta\psi$ كما هو مبين فى الشكل (٢ ــ ٧ ب) . وواضح ان الفرق $\Delta\tau$ يقترب من $\Delta\psi$ بالمقدار عندما تكون قيم $\Delta\psi$ صغيرة . كذلك يصبح اتجاه $\Delta\tau$ عموديا على اتجاه τ فى الغاية ، عندما يقترب $\Delta\psi$ و Δs من الصفر . نستنتج مما ذكر ان مقدار المشتقة $d\tau/d\psi$ يساوى واحدا واتجاهها عمودى على τ . اذن سنسميها بالوحدة المتجهة العمودية وسنمثلها بالرمز $\vec{n}$ ، اى

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\psi} = \vec{n}$$

ثم لايجاد مشتقة الزمن $d\vec{\tau}/dt$ نستعمل القانون المتسلسل Chain Rule كالاتى

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\psi}\,\frac{d\psi}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\psi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \vec{n}\,\frac{v}{\rho}$$

حيث

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

وهو يمثل نصف قطر تكور مسار الجسيم المتحرك فى النقطة P . وعند تعويض $d\vec{\tau}/dt$ المذكورة فى المعادلة (٢ ــ ١٤) نحصل على النتيجة النهائية التالية

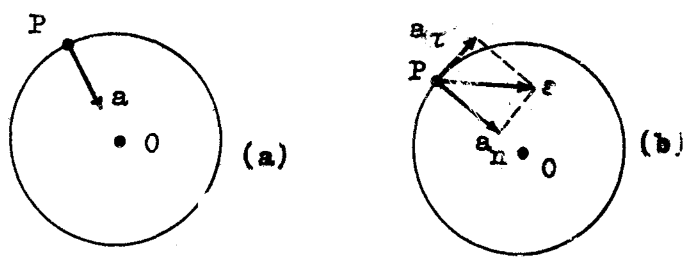
$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{n} \qquad (٢ - ١٦)$$

اذ ان هناك مركبة لتعجيل الجسيم المتحرك باتجاه الحركة مقدارها $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$ وهذه تمثل التعجيل المماس . ومركبه اخرى مقدارها $a_n = v^2/\rho$ وهي المركبة العمودية . هذه المركبة تتجه دائما نحو مركز التكور من الجانب المقعر لمسار الحركة . ولهذا السبب سميت المركبة العمودية كذلك بتعجيل الجذب المركزي .

مما تقدم نرى ان مشتقة الزمن للانطلاق هي مركبة التعجيل المماسة . ويعين مقدار التعجيل الكلي كما يلي

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٢ ـ ١٧)$$

مثلا اذا تحرك جسيم على محيط دائرة بانطلاق ثابت v فمقدار متجه التعجيل يكون v^2/R_o حيث R_o يمثل نصف قطر الدائرة . ومتجه التعجيل في هذه الحالة يؤثر دائما نحو مركز الدائرة . اما اذا كان الانطلاق غير ثابت وانما يزداد بمعدل زمني معين مقداره $\dot{v}$ فعندئذ مركبة التعجيل الامامية تكون مساوية لهذه الكمية ولكنها تنحرف مبتعدة عن مركز الدائرة نحو الاتجاه الامامي كما هو مبين في الشكل (٢ ـ ٨) . اما اذا كانت حركة الجسيم متباطئة فان متجه التعجيل ينحرف بالاتجاه المعاكس .



الشكل (٢ ـ ٨) متجهات التعجيل لجسيم يتحرك على مسار دائري

آ ـ انطلاق ثابت ب ـ انطلاق متزايد

٢ ـ ٩ السرعة والتعجيل في الاحداثيات القطبية المستوية
Velocity and Acceleration in Plane Polar Coordinates

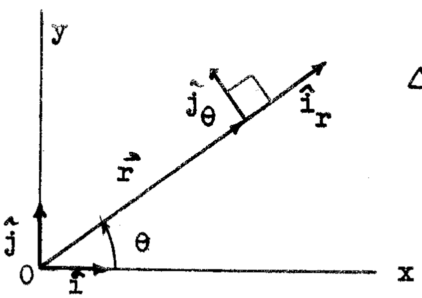
من الملائم في الغالب استعمال الاحداثيات القطبية r ، θ لتمثيل موضع جسيم يتحرك في مستو . ويمكن كتابة موضع الجسيم بدلالة جبر المتجهات كحاصل لضرب المسافة القطبية r في الوحدة المتجهة القطبية $\hat{i}_r$ اي

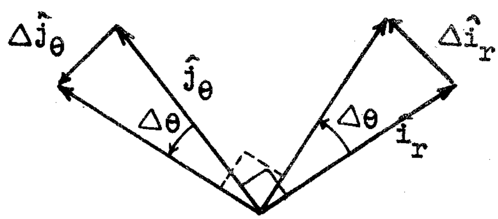
$$\vec{r} = r\hat{i}_r \qquad (٢ ـ ١٨)$$

فعندما يتحرك الجسيم يتغير كل من $\vec{r}$ ، $\hat{i}_r$ لان كليهما دوال للزمن اذن اذا فاضلنا بالنسبة للزمن نحصل على

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\,\frac{d\hat{i}_r}{dt} \qquad (٢ ـ ١٩)$$

لكي نحسب المشتقة $d\hat{i}_r/dt$ نفترض مخطط المتجهات المبين في الشكل (٢ ـ ٩) . تبين دراسة الشكل انه ، عندما يتغير اتجاه $\vec{r}$ بمقدار $\Delta\theta$ فالتغيير المقابل له





الشكل (٢ ـ ٩) الوحدات المتجهه للاحداثيات القطبية المستوية

ى الوحدة المتجهة القطبية $\Delta \hat{i}_r$ يعين كما يلي مقدار $|\Delta i_r|$ تقريبـــا يساوى $\Delta\theta$ واتجاه $\Delta \hat{i}_r$ تقريبا عمودى على $\hat{i}_r$ لنستخدم وحدة متجهة اخرى j_θ اتجاهها عمودى على $\hat{i}_r$ ، عندئذ يكون عندنا

$$\Delta \hat{i}_r \simeq \hat{j}_\theta \; \Delta\theta$$

فاذا قسمنا على Δt واخذنا الغاية نحصل على

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \hat{j}_\theta \frac{d\theta}{dt} \qquad (٢ \text{ ـ } ٢٠)$$

مشتقة الوحدة المتجهة القطبية بالنسبة للزمن • وبطريقة مماثلة تماما يمكن ان نثبت بـــأن التغيير فى الوحدة المتجهة $\hat{j}_\theta$ يعين بالتقريب التالى ـ

$$\Delta\hat{j}_\theta \simeq - \hat{i}_r \; \Delta\theta$$

والاشارة السالبة ادخلت هنا لتشير الى ان اتجاه تغير $\Delta\hat{j}_\theta$ معاكس لاتجاه $\hat{i}_r$ كما يمكن رؤيته فى الشكل • وعليه تكون مشتقة الزمن •

$$\frac{d\hat{j}_\theta}{dt} = - \hat{i}_r \frac{d\theta}{dt} \qquad (٢ \text{ ـ } ٢١)$$

واخيرا باستخدام المعادلة (٢ ـ ٢٠) لمشتقة الوحدة المتجهة القطبية نستطيـع ان نكتب معادلة السرعة كالآتى

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{j}_\theta} \qquad (٢ \text{ ـ } ٢٢)$$

اذن $\dot{r}$ يمثل مقدار المركبة القطبية لمتجهة السرعة و $r\,\dot{\theta}$ مقدار المركبة المستعرضة

لكى نجد متجه التعجيل ناخذ مشتقة السرعة بالنسبة للزمن وهذا يعطى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\,\frac{d\hat{i}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{j}_\theta + r\dot{\theta}\,\frac{d\hat{j}_\theta}{dt}$$

وعند التعويض عن قيم $d\hat{i}_r/dt$, $d\hat{j}_\theta/dt$ من المعادلتين (٢ ـ ٢٠) و (٢ ـ ٢١) نحصل على المعادلة التالية لمتجـه التعجيل بدلالة الاحداثيـات القطبية المستوية ٠

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \hat{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \hat{j}_\theta \qquad (٢ ـ ٢٣)$$

اذن يكون مقدار المركبة القطبية لمتجـه التعجيل هـو

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (٢ ـ ٢٤)$$

والمركبة المستعرضة هى

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (٢ ـ ٢٥)$$

ترينا النتيجة السابقة ٠ مثلا انـه عندما يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرهـا ثابت b ، اى ان $\dot{r} = 0$ عندئذ يكون مقدار المركبة القطبية مساويا الـى $b\dot{\theta}^2$ وتتجه الى الداخل نحو مركز المسار الدائرى ٠ وفى هذه الحالـة يكون مقدار المركبة المستعرضة مساويا الى $b\ddot{\theta}$. ومن ناحية اخرى اذا تحـرك الجسيم على خط قطبى ثابت اى اذا كانت θ ثابتة ، فان المركبة القطبيـة تساوى $\ddot{r}$ ، والمركبة المستعرضة تساوى صفرا ٠ اما اذا كان كل مـن r , θ متغيرا ، فان العلاقة العامة (٢ ـ ٢٣) تعطى التعجيل ٠

مثال

يتحرك جسيم على مسار حلزونى بحيث موضعـه بالاحداثيات القطبية هو كالاتى ـ

$$r = bt^2 \qquad \theta = ct$$

حيث b و c هى ثوابت • جد السرعة والتعجيل كدوال للزمن t •

من المعادلة (٢ ـ ٢٢) نجد ان

$$\vec{v} = \hat{i}_r \frac{d}{dt}(dt^2) + \hat{j}_\theta (bt^2)\frac{d}{dt}(ct)$$

$$= (2bt)\hat{i}_r + (bct^2)\hat{j}_\theta$$

وبالتماثل نحصل من المعادلة (٢ ـ ٢٣) على ما يلى

$$\vec{a} = \hat{i}_r(2b - bt^2c^2) + \hat{j}_\theta\left[0 + 2(2bt)c\right]$$

$$= b(2 - t^2c^2)\hat{i}_r + 4bct\hat{j}_\theta$$

من المفيد ان نلاحظ فى هذا المثال ان المركبة القطبية للتعجيل تصبح سالبة عندمـا تكون t كبيرة ولو ان نصف القطر يزداد دائما بصورة رتيبة مع الزمـن •

(٢ ـ ١٠) السرعة والتعجيل فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية

Velocity and Acceleration in Cylindrical and Spherical Coordinates:

الاحداثيات الاسطوانية Spherical coordinate

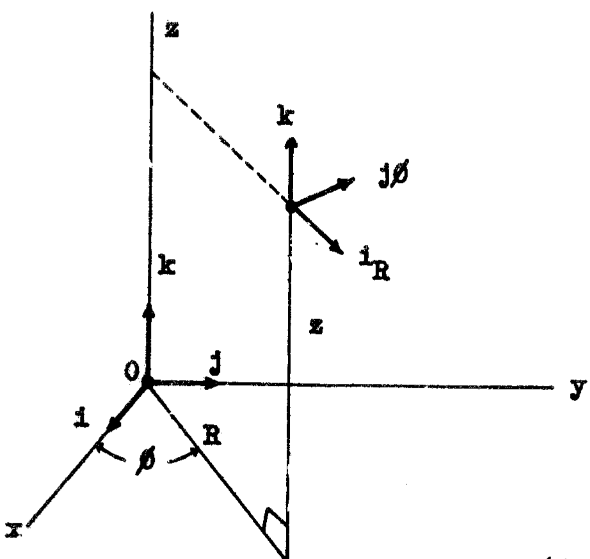
فى حالة الحركة ذات الابعاد الثلاثة • يمكن تعيين موضع الجسيم بدلالة الاحداثيا الاسطوانية R, Φ, z عندئذ يكتب موضع المتجـه على النحو التالى

$$\vec{r} = R\hat{i}_R + z\hat{k} \qquad (٢ - ٢٦)$$

حيث $\hat{i}_R$ يمثل وحدة المتجه القطبية فى المستو xy و k, وحدة المتجه باتجـــاه المحور z يلزمنا وحدة متجهة ثالثة $\hat{j}_\phi$ بحيث تكون المتجهات الثـــلاث $\hat{k}$ $\hat{j}_\phi$ $\hat{i}_R$ ثلاثى اليد اليمنى كما هو موضح فى الشكل (٢ ــ ١٠) ٠

يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل كالسابق بالتفاضل ٠ وهذا يتطلب مرة ثانيـــة تفاضل الوحدات المتجهه ٠ وباستخدام طريقة مماثلة لتلك التى استخدمت فى حالة المستوى نجد ان

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = -\hat{i}_R\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{d\hat{i}_R}{dt} = \hat{j}_\phi\,\dot{\phi}$$



الشكل (٢ ــ ١٠)
الوحدات المتجهه للاحداثيات الاسطوانيـــة

ولما كانت الوحدة المتجهة $\hat{k}$ لا تغير اتجاهها ، فمشتقتها بالنسبة للزمن تساوى صفرا ومن هذه الحقائق ، يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل بسهولة من المعادلات التاليــة

$$\boxed{\vec{v} = \dot{R}\hat{i}_R + R\dot{\phi}\,\hat{j}_\phi + \dot{z}\hat{k}} \qquad (٢ - ٢٧)$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{i}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{j}_\phi + \ddot{z}\hat{k}} \qquad (٢ - ٢٨)$$

هذه تعطى قيم v و a بدلالة مركباتها فى الثلاثى الدائر $\hat{i}_R\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}$

طريقة اخرى لايجاد مشتقات الوحدات هى بتفاضل المعادلات التالية التى تمثل العلاقات بين وحدات الثلاثى الثابت ijk والثلاثى الدائــر -

$$\hat{i}_R = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$
$$\hat{j}_\phi = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

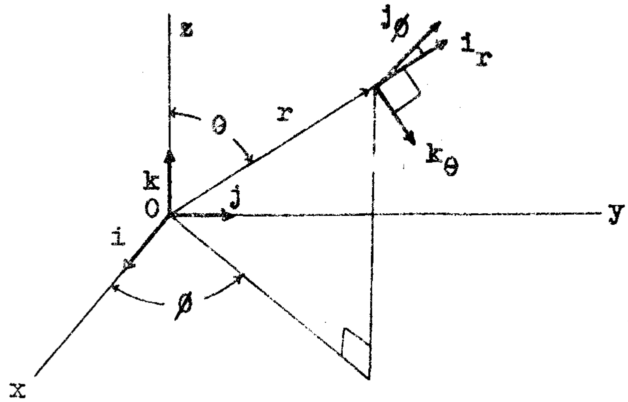
وقد تركت الخطوات كتمرين

الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates

عند استخدام الاحداثيات الكروية r , ϕ , θ لوصف موضع جسيم يكتب متجه الموضع كحاصل لضرب المسافة القطبية r والوحدة المتجهه القطبية $\hat{i}_r$ كما هى الحال فى الاحداثيات القطبية المستوية . اذن

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \qquad (٢ - ٣٠)$$

فاتجاه $\hat{i}_r$ يعين الان بالزاويتين ϕ و θ لندخل وحدتين متجهتين اخريين $\hat{j}_\phi$ ، $\hat{k}_\theta$ كما هو مبين في الشكل (٢ ــ ١١) ٠ فالمتجهات الثـــــلاث $\hat{k}_\theta$ $\hat{j}_\phi$ $\hat{i}_r$ تكوّن ثلاثي اليد اليسرى كما هو مبين في الشـــكل [1]



الشكل (٢ ــ ١١) الوحدات المتجهه للاحداثيات الكرويــــة

والسرعة هي ــ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt} \qquad (٢ ــ ٣١)$$

مشكلتنا التالية هي كيفية تمثيل المشتقة $d\hat{i}_r/dt$ بدلالة الوحدات المتجهه فـــي الثلاثي الدائــــر ٠

---

(١) ان اختيار ثلاثي اليد اليسرى للاحداثيات الكروية الى حد ما ملائم بحيث سيكـــون لوحدات متجهات السمت نفس الرمز ، اى $\hat{j}_\phi$ في كل من الاحداثيات الاسطوانية والكروية ٠ ويعين ثلاثي اليد اليمنى في الاحداثيات الكروية بسهولة ويكون ذلـــك بعكس ترتيب متجهات الزوايا اى ــ

$$\hat{i}_r \; \hat{k}_\theta \; \hat{j}_\phi$$

بالرجوع الى الشكل نرى ان العلاقات التالية تصح بين الثلاثي $\hat{i}_r\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}_\theta$ والثلاثي $\hat{i}_R\ \hat{j}_\phi\ \hat{k}$

$$\begin{aligned} \hat{i}_r &= \hat{i}_R \sin\theta + \hat{k}\cos\theta \\ \hat{j}_\phi &= \hat{j}_\phi \\ \hat{k}_\theta &= \hat{i}_R \cos\theta - \hat{k}\sin\theta \end{aligned} \qquad (٢ ـ ٣٢)$$

اذن من المعادلات (٢ ـ ٢٩) يمكننا ان نجد بسهولة

$$\begin{aligned} \hat{i}_r &= \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta \\ \hat{j}_\phi &= -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \\ \hat{k}_\theta &= \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta \end{aligned} \qquad (٢ ـ ٣٣)$$

والتي تمثل الوحدات المتجهة لـ... الدائر بدلالة الثلاثي الثابت $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$. لنجد مشتقة المعادلة الاولى بالنسبة للزمن . فالنتيجة تكون

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \hat{i}\,(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi) + \hat{j}(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi) - \hat{k}\dot\theta\sin\theta$$

ثم . باستخدام علاقات الوحدات المتجهه $\hat{k}_\theta$ ، $\hat{j}_\phi$ في المعادلة (٢ ـ ٣٣)

نجد ان المعادلة السابقة تختصر الى

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \dot\phi\,\hat{j}_\phi\sin\theta + \dot\theta\,\hat{k}_\theta \qquad (٢ ـ ٣٤)$$

يمكن ايجاد المشتقتين الاخريين بالاسلوب نفسه والنتائج تكون

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = -\dot\phi\,\hat{i}_r\sin\theta - \dot\phi\,\hat{k}_\theta\cos\theta \qquad (٢ ـ ٣٥)$$

$$\frac{d\hat{k}_\theta}{dt} = -\dot\theta\,\hat{i}_r + \dot\phi\hat{j}_\phi\cos\theta \qquad (٢ ـ ٣٦)$$

وقد تركت الخطوات كتمرين للطالب · نعود الان الى مسألة ايجاد $\vec{v}$ ، اذا عوضنا العلاقة الجبرية للمشتقة $d\hat{i}_r/dt$ من المعادلة (٢ ــ ٣٤) فى المعادلة (٢ ــ ٣١) · فالنتيجة النهائية تكون

$$\boxed{\vec{v} = \hat{i}_r\dot{r} + \hat{j}_\phi r\dot{\phi}\sin\theta + \hat{k}_\theta r\dot{\theta}} \qquad (٢ـ٣٧)$$

والتى تعطى متجه السرعة بدلالة مركباته فى الثلاثى الدائر $\hat{i}_r\hat{j}_\phi\hat{k}_\theta$

ولايجاد التعجيل نفاضل العلاقة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن فنحصل على ــ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\hat{i}_r}{dt} + \hat{j}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\sin\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} + \hat{k}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{k}_\theta}{dt}$$

عند استخدام العلاقات السابقة لمشتقات الوحدات المتجهة نجد بسهولة ان العلاقة السابقة للتعجيل تصبح كالاتى

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\hat{i}_r \\ & + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{j}_\phi \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{k}_\theta\end{aligned} \qquad (٢ـ٣٨)$$

والتى تعطى متجه التعجيل بدلالة مركباته فى الثلاثى ــ $\hat{i}_r\hat{j}_\phi\hat{k}_\theta$

تمارين

٢ ـ ١ المعادلات التالية تمثل متجه موضع جسيم متحرك · جد السرعة ، الانطلاق ، والتعجيل كدوال للزمن فى كل حالة وارسم كذلك منحنى لمسار الحركة ·

(a) $\vec{r} = \hat{i}ct - \hat{j}\frac{g}{2}t^2$

(b) $\vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}A \sin \omega t$

(c) $\vec{r} = \hat{i}A \sin \omega t + \hat{j}B \cos \omega t$

(d) $\vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}b \cos \omega t + \hat{k}b \sin \omega t$

٢ ـ ٢ تمثل العلاقة التالية حركة جسيم

$$\vec{r} = \hat{i} \cos \omega t + 2\hat{j} \sin \omega t$$

جد الزاوية بين متجه التعجيل ومتجه السرعة فى الزمن $t = \pi/4\omega$

٢ ـ ٣ تمثل العلاقتان التاليتان موضع جسيمين يتحركان على مسار دائرى مشترك

$$\vec{r}_1 = \hat{i}b \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t$$

$$\vec{r}_2 = \hat{i}b \cos \omega t - \hat{j}b \sin \omega t$$

جد السرعة النسبية ، مقدار السرعة النسبية ، ومعدل التغيير الزمنى للمسافة بين الجسيمين ، الجميع كدوال للزمن t .

٢ ـ ٤ يتغير تعجيل جسيم مع الزمن وفقا للمعادلة $\vec{a} = \hat{i}At + \hat{j}Bt^2 + \hat{k}Ct^3$

اذا كانت السرعة تساوى $\vec{v}_0$ والموضع $\vec{r}_0$ فى الزمن $t = 0$ ، جد متجه الموضع كدالة للزمن ·

٢ ـ ٥ يتحرك جسيم بانطلاق ثابت ولكنه يغير اتجاهه باستمرار · اثبت ان متجه التعجيل يكون دائما عموديا على متجه السرعة · حل التمرين بالطريقتين التاليتين ـ

آ ـ باستخدام علاقات المركبات المماسة والعمودية للسرعة والتعجيل ·

ب ـ اثبت ان $\vec{v}.\vec{a} = 0$ اذا اعطيت $\vec{v}$, $\vec{a}$ بالاحداثيات الديكارتيـة ·

٢ ـ ٦ اثبت ان مقدار المركبة المماسة للتعجيل هى

$$a_\tau = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

والمركبة العمودية

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{\frac{1}{2}}$$

٢ ـ ٧ استخدم النتيجة السابقة لايجاد المركبات العمودية والمماسة للتعجيل كـدوال للزمن فى التمرين (٢ ـ ١) ·

٢ ـ ٨ يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها ثابت b · فاذا كان انطلاق الجسيم يتغير مع الزمن وفقا للمعادلة $v=At^2$ فاية قيمة او قيم للزمن t يصنع فيهـا متجه التعجيل زاوية $45°$ مع متجه السرعـة ·

٢ ـ ٩ اذا علمت ان الاحداثيات القطبية لجسيم هى

(a) $r = be^{kt}$ $\theta = \omega t$

(b) $r = A \cos\omega t$ $\theta = c\omega t$

جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن · كذلك جد الانطلاق ومقدار التعجيـل فى الزمن $t = 0$.

٢ ـ ١٠ يتحرك جسيم على مسار لولبى ، فاذا كانت احداثياته الاسطوانية تتغير مـع الزمن وفقا للعلاقات التاليـة

$$R = A\,,\ \phi = Bt^2\ ,\ z = Ct^2$$

حيث A, B, C ثوابت · جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن t

جد كذلك الزاوية بين متجهى السرعة والتعجيل فى الزمن $t = 1$.

٢ ــ ١١ اذا اعطيت حركة جسيم بالاحداثيات الكروية كالاتى ــ

$$r = b \qquad \phi = \omega t \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\omega t\right)$$

جد الانطلاق ومقدار التعجيل كدوال للزمن t . وما هو شكل المسار الذى تمثلـــه المعادلات السابقة .

٢ ــ ١٢ برهن على ان

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = A\,\frac{dA}{dt}$$

١ ملاحظة ــ جد مشتقة العلاقة $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ بالنسبة للزمـــن t) .

٢ ــ ١٣ اذا كان

$$\vec{A} = 2t^2\,\hat{i} + 3t\hat{j} - 2\hat{k}$$

و

$$\vec{B} = \hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t + t^2\hat{k}$$

جـد

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \,, \quad \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$$

كـــدوال للزمـــن t .

٢ ــ ١٤ اثبت ان

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}) = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}})$$

حيث

$$\dot{\vec{a}} = d\vec{a}/dt, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

٢ ــ ١٥ تتدحرج عجلة على سطح الارض بتعجيل امامى ثابت a_c جد التعجيل فى اية نقطة على حافة العجلة بالنسبة الى

آ ـ مركز العجلة ٠ و (ب) الارض ٠ اية نقطة على حافة العجلة لها اكبر تعجيل بالنسبة للارض ٠

٢ ـ ١٦ اثبت ان $d\hat{i}_R/dt = \hat{j}_\phi \dot{\phi}$, $d\hat{j}_\phi/dt = -\hat{i}_R \dot{\phi}$ بتفاضل المعادلات (٢ـ٢٩)

٢ ـ ١٧ اكمل اشتقاق المعادلات (٢ ـ ٣٥) و (٢ ـ ٣٦) ٠

٢ ـ ١٨ املاء الخطوات اللازمة لايجاد التعجيل فى الاحداثيات الكروية ، معادلة (٢ ـ ٣٨) ٠

٢ ـ ١٩ وضعت عجلة نصف قطرها b فى جهاز ودورت على النحو التالى ـ حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω_1 ، والمحور يدور بدوره بسرعة زاوية ثابتة ω_2 حول محور عمودى، بطريقة يبقى معها محور العجلة في مستوى افقي ومركز العجلة ساكنا ٠ استخدم الاحداثيات الكروية لايجاد التعجيل لاية نقطة على حافة العجلة وبصورة خاصة التعجيل في اعلى نقطة من العجلة ٠

٢ ـ ٢٠ افرض ان الوحدة المتجهه المماسة τ يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية

$$\tau = \frac{\vec{v}}{v}$$

جد علاقة للوحدة المتجهه العمودية $\vec{n}$ بدلالة $\dot{v}, v, \vec{v}, a, \vec{a}$ كما فى تمرين (٢ ـ ٦) ٠

الفصـــــــل الثالث

ديناميك الجســـــيم • الحركة على خط مستقيم

Dynamics of a Particle-Rectilinear Motion

ان الداياناميك ــ كما بينا في المقدمة ــ هو احد فروع الميكانيك الذى يستخدم قوانين الفيزيـاء التي تتحكم بالحركـة الفعليـة للاجسـام المادية• واحـد اغـــراض الداينامك الاســاسـية التنبـوء بكل الطرق الممكنـة التي تتحرك فيها منظومـــــة ماديــة • و نوع الحركـة التي ســتحدث في ظروف معينـة • ان دراسـتنا للداينامك في هذا الموضـع سـوف تعتمـد على قوانين الحركـة كما صاغها نيوتن لاول مـــرة • و ســندرس في فصل متأخر طرقا اخرى متقدمـة اكثر لتوضيـح قوانـين الحركـــــة و ذلك باسـتخدام معادلات لاكرانـج و هملتن •

و هي ليســت على كل حال نظريات مختلفـة و انما يمكن اشتقاقها من قوانين نيوتن

٣ ــ ١) قوانين نيوتن للحركـة Newton's Laws of Motion

مما لا شــك فيه ان القارئ ملم حاليا بقوانين نيوتن للحركة المألوفة و هي كالاتي :

١ــ كل جســم يســتمر في حالة السـكون او الحركة المنتظمـة في خط مسـتقيم ما لـم ترغمـه قوة على تغيير تلك الحالـة •

٢ــ يتناســب تغيير الحركـة مع القوة المســلطة و تحدث باتجاه تأثير القــوة •

٣ــ هنـاك لكل فعـل دائمـا رد فعل مســاو له في المقدار و معاكس في الاتجـاه أو الافعال المتبادلة لجســمين تكون دائما متســاوية و متعاكسـة بالاتجاه ••

دعنـا الان نختبر هـذه القـوانين بشـيئ من التفصيـل

٣ــ٢) قانون نيوتن الاول • المحاور المرجعيـة

القصوريه

Newton's First Law. Inertial Reference System.

يصف القانون الاول خاصـة عامـة تشـترك فيها جميـع المواد • اى الاستمرارية

او القصور الذاتي Inertia وينص القانون على ان الجسم المتحرك يسير على خط مستقيم بانطلاق ثابت ما لم يمنعه تأثير ما يسمى بالقوة يحول دون استمراره على ذلك . سواء تحرك الجسيم على خط مستقيم بانطلاق ثابت ام لا فأن ذلك لا يعتمد فقط على التأثيرات الخارجية (القوى) وانما يعتمد كذلك على محاور مرجعية خاصة تستخدم لوصف الحركة . في الحقيقة ان قانون نيوتن الاول ما هو الا تعريف لنوع معين من محاور مرجعية تسمى بالمحاور المرجعية المستمرة او النيوتونية Newtonian or Inertial-Reference system ومحاور كهذه يصح فيها قانون نيوتن الاول .

هنا يكون طبيعيا ان يظهر السؤال التالي :

كيف يمكن معرفة ما اذا كانت محاور معينة تكون محاورا نيوتونية اولا ؟ ان الجواب على سؤال كهذا ليس بسيطا . فلاجل تخليص الجسم من تأثير جميع القوى فإن من الضروري عزله تماما . وهذا غير ممكن بطبيعة الحال لحتمية وجود على الاقل بعض قوى الجاذبية التي تؤثر على الجسم ما لم يبعد الى مسافة لانهائية من جميع المواد الاخرى .

اما في الاغراض العملية التي لا تحتاج الى دقة متناهية وهي كثيرة . فأن المحاور المثبتة على الارض تكون اقرب الى المحاور النيوتونية لذلك — وعلى سبيل المثال — تبدو كرة البليارد وكأنها تسير بخط مستقيم وبانطلاق ثابت طالما لا تصطدم بكرة اخرى او تضرب الحافة ولكن اذا قيست حركة الكرة بدقة متناهية فسوف نكتشف ان مسارها مقوس قليلا . وهذا ينشأ بسبب دوران الارض . ولذلك المحاور المثبتة على الارض ليست في الواقع محاور نيوتونية . والافضل منها هي التي تستخدم مركز الارض ومركز الشمس وكوكب بعيد كنقاط مرجعية . ولكن حتى هذه المحاور ليست نيوتونية تماما بسبب حركة الارض حول الشمس . ان التقريب الافضل هو — على سبيل المثال — اعتبار مركز الشمس

و نجمتين بعيدتين كنقاط مرجعية • و قد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

٣ـ٣) الكتلة و القوة • قانوني نيوتن الثاني و الثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المالوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه (او ايقافه) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب و القياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسمين B,A فكيف نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استنباطها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسيمين يوءثر احدهما على الاخر كربطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسيمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه و النسبة بينهما ثابتة (على فرض ان التعجيل معطى في المحاور النيوتونية و اخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسيمين A و B فقط) و يمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا و الاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt}\mu_{BA} \qquad \vec{a}_A = -\vec{a}_B \mu_{BA} \quad (٣ـ١)$$

الثابت μ_{BA} يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم B بالنسبة الى A من المعادلة (٣ـ١) ينتج ان $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$ اذن قد نعبر عن μ_{BA} بالنسبة $\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$ حيث استعمل جسم ما كمعيار لوحدة القصور الذاتي • الان النسبة m_B / m_A يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاى جسم ثالث C

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$

و هذه فعلا وجدت صحيحة . نسمي الكمية m بالكتلة •

وبعبارة ادق يجب ان نسمي m كتلة القصور الذاتي لان تعريفها اعتمد على خواص القصور الذاتي • في الممارسة الفعلية تعين عادة نسب الكتل بالوزن • فالوزن او قوة جذب الارض تتناسب مع ما قد يسمى بالكتلة التثاقلية للجسم • على اية حال • ان جميع التجارب المعروفة لحد الان — تشير الى أن كُلّاً من كتلة القصور الذاتي و الكتلة التثاقلية تتناسب كل منهما بدقة مع الاخرى • اذن لا نحتاج لاغراضنا ان نفرق بين هذين النوعين من الكتلة •

يمكن الان كتابة الحقيقة الاساسية التي عبرت عنها المعادلة (٣ ـ ١) على الشكل التالي : —

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = - m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad (٣\text{ـ}٢)$$

ان حاصل ضرب الكتلة في التعجيل في المعادلة السابقة يشكل " تغيير الحركة " لقانون نيوتن الثاني •و وفقا لهذا القانون فان هذا التغيير يتناسب مع القوة • وبعبارة اخرى يمكننا كتابة القانون الثاني على النحو التالي

$$\vec{F} = km \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (٣\text{ـ}٣)$$

حيث $\vec{F}$ تمثل القوة • و k ثابت التناسب اعتياديا نضع k=1 ونكتب(١)

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (٣\text{ـ}٤)$$

---

(١) ان وحدة القوة في نظام mks والتي عرفت في المعادلة (٣ـ٤) تسمى بالنيوتن لذلك قوة نيوتن واحد تعجل جسم كتلته ١ كغم بمقدار ١ متر/ثانية^{٢}• و وحدة القوة في نظام cgs (١ غم × ١ سم / ثا^{٢}) هي الداين •

المعادلة المذكورة اعلاه تكافىء

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (٣\_٥)$$

اذا كانت الكتلة ثابتة • وسنرى في المستقبل ان النظرية النسبية تتكهن بان كتلة الجسم المتحرك غير ثابتة وانما تكون دالة لانطلاقه • وبذلك تكون المعادلتان (٣_٤) و (٣_٥) غير متكافئتين تماما وعلى اية حال • فان الانطلاقات عندما تكون صغيرة قياسا الى انطلاق الضوء (٣ × ١٠^٨ متر / ثا) يكون تغيير الكتلة مهملا •

ووفقا للمعادلة (٣_٤) يمكننا الان تفسير الحقيقة الاساسية التي بينتها المعادلة (٣_٢) كتعبير عن حالة الجسمين الذين يوثر احدهما على الاخر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه • اى

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

وهذا هو مضمون قانون نيوتن الثالث • القوى تأثير متبادل وتحدث بمقادير متساوية بين اى جسمين يوثر كل منهما على حركة الاخر ••

فائدة واحدة كبيرة لمفهوم القوة هي تمكننا من حصر انتباهنا على جسم منفرد • والاهمية الفيزيائية لفكرة القوة هي امكانية ايجاد دالة بسيطة نسبيا للاحداثيات في ظروف معينة بصورة اعتيادية والتي تسمى بدالة القوة • وعندما توضع هذه الدالة مساوية لحاصل ضرب الكتلة في التعجيل فانها تصف حركة الجسم بصورة صحيحة •

٣ _٤) الزخم الخطي Linear Momentum

ان حاصل ضرب الكتلة في السرعة يسمى بالزخم الخطي • و يمثل بالرمز p .

اذن (٣_٦)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

فالنص الرياضي لقانون نيوتن • المعادلة (٣_٥) عندئذ يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (٣ \_ ٧)$$

بعبارة اخرى ، القوة تساوى التغيير الزمني للزخم الخطي ٠

و يمكن التعبير بصورة افضل عن القانون الثالث ، قانون الفعل ورد الفعل ، بدلالة الزخم الخطي ٠ اذن لجسمين A و B بينهما تأثير متبادل نحصل على

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

او

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

ووفقا لذلك

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{ثابت}$$

اذن يتضمن القانون الثالث بقاء الزخم الخطي الكلي لجسمين بينهما تأثير متبادل ثابتا في جميع الاحوال

ان ثبوت مجموع الزخم الخطي لجسمين بينهما تأثير متبادل هو حالة خاصة لقانون عام سنشرحه بالتفصيل فيما بعد ، اى ان الزخم الخطي الكلي لاى مجموعة معزولة يبقى ثابتا بمرور الزمن ٠ و يسمى هذا النص الاساسي بقانون حفظ الزخم الخطي و هو احد القوانين الاساسية في الفيزياء ٠ و قد فرضت صحته حتى في الحالات التي يفشل فيها تطبيق قوانين نيوتن نفسها ٠

٣ ـ ٥) حركة الجسيم Motion of a Particle

ان معادلة حركة الجسيم الاساسية تعطي بالعلاقة الرياضية لقانون نيوتن الثاني ، اى المعادلة (٣ ـ ٤) و عندما يكون الجسيم تحت تأثير اكثر من قوة واحدة ، فيمكن اعتبار جمع هذه القوى بطريقة جبر المتجهات من الحقائق التجريبية ٠٠ اى

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} \qquad (٣ ـ ٨)$$

الممثلة بالاحداثيات الديكارتيه والمعادلة المذكورة اعلاه تكافئ المعادلات العددية التالية

$$F_x = \sum F_{ix} = m\ddot{x}$$
$$F_y = \sum F_{iy} = m\ddot{y} \qquad (٣ــ٩)$$
$$F_z = \sum F_{iz} = m\ddot{z}$$

تستخدم غالبا محاور اخرى غير المحاور الديكارتيه والتي سوف نبحثهما فيما بعد٠اذا كان تعجيل جسيم ما معروفا فان معادلة الحركة (المعادلة ٣ ــ٨) تعطي القوة التي تؤثر على الجسيم • ولكن المسائل الاعتيادية لديناميك جسيم هي تلك التي تكون فيها القوى دوال معينة معروفة للاحداثيات بضمنها الزمن • والمهم هو ايجاد موضع الجسيم كدالة للزمن ٠ان هذا يتطلب حل مجموعة من المعادلات التفاضلية • وفي بعض المسائل يظهر من المستحيل ايجاد حلول للمعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الدوال التحليلية المعروفة • وفي هذه الحالة يجب استعمال بعض طرق التقريب • وفي تطبيقات عملية كثيرة كحركة القذنيات ballistics والتوابع وغيرها تكون المعادلات التفاضلية من التعقيد بحيث يصبح من الضروري الاستعانة بالتكامل العددي• وغالبا يحسب بواسطة الحاسبات الالكترونية عالية السرعة للتنبوء بالحركة •

٣ ــ٦) الحركة على خط مستقيم Rectilinear Motion

اذا بقي جسيم متحرك على خط مستقيم ، سميت الحركة بالحركة على خط مستقيم وفي هذه الحالة نحتاج الى مركبة واحدة فقط من المعادلة (٣ ــ ٩) مثل مركبة ــ x ، لاننا يمكننا ان نختار المحور ــ x كخط للحركة دون ان نخسر التعميم • عندئذ تصبح الحروف التي تكتب في اسفل الرموز لا ضرورة لهما وتكتب المعادلة العامة للحركة على النحو التالي : ــ

$$F(x,\dot{x},t) = m\ddot{x}$$

ولنعتبر الان بعض الحالات الخاصة التي يمكن فيها تكامل المعادلة بالطرق الاوليـــة

القـوة ثابتـة Constant Force

ان ابسط الحالات هي التي تكون فيها القـوة ثابتـة • وفي هـذه الحالـة يكـون التعجيل ثابتـا ••

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\overline{F}}{m} = \text{constant} = a$$

ويمكن ايجـاد حـل هذه المعادلة بسـهولة بالتكامل المباشـر

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\, dt$$

$$v = at + v_0 = dx/dt \qquad (٣\text{—}١١)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (at + v_0)dt$$

$$x = \tfrac{1}{2}\, at^2 + v_0 t + x_0 \qquad (٣\text{—}١٢)$$

حيث v_0 تمثل السـرعة الابتدائية x_0 الموضع الابتدائي • وبتعويض الزمـن t بين المعادلة (٣ـ١١) و (٣ـ١٢) نحصل على

$$2a\,(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad (٣\text{—}١٣)$$

سـنذكر الطالب بان المعادلات المذكورة اعلاه هي معادلات الحركة المألوفة ذات التعجيل المنتظـم •

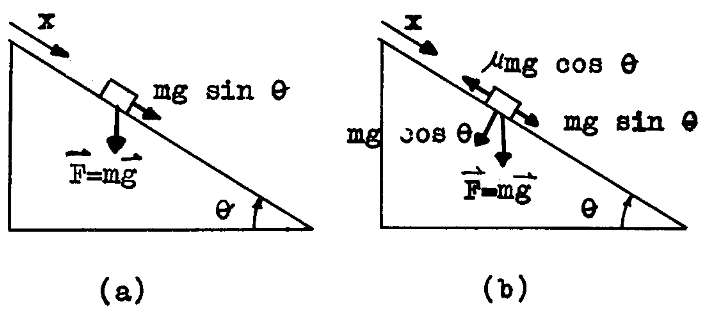
هناك تطبيقـات اسـاسـية عديدة فمثـلا في حالة سـقوط الجسـم الحـر بالقرب من سـطح الكرة الارضيـة اهمـــال مقاومـة الهواء يكون التعجيـــل ثابتا تقريبـا • وتمثل تعجيل الجسـم الحـر السـقوط بالرمز $\overrightarrow{g}$ (قيمتــه العددية المقاسـة ($g = 9.8$ m/sec^2

و وفقا لـذلك تكـون قـوة جاذبيـة الارض متجهـة نحـو الاسـفل (الثقـــل) وتسـاوى $\overrightarrow{mg}$ وقوة الجاذبيـة متواجـدة دائمـا بصرف النظر عن حركـة الجسـم وهي مسـتقلة عن اية قـوى اخـرى والتي قد تؤثر على الجسـم • وسـنسـميها من الان فصاعـدا $\overrightarrow{mg}$.

مثـــال

افرض ان جسـيماً ينزلـق اسـفل سـطح املس يميل بزاويـة θ عن الافـق كما هو مبين في الشـكل (٣ـ١أ) وقد اخترنا الاتجـاه الموجب لمحـور ـ x نحـو اسـفل السـطح ، كما هو مبين • ولذلك تكون مركبـة قوة الجاذبية باتجـاه x تسـاوى $mg \sin \theta$ ولما كانت هذه الكميـة ثابتـة لذلك تسـتخدم المعـادلات (٣ـ١١) و (٣ـ١٢) و (٣ـ١٣) لهذه الحركـة حيث

$$a = \frac{\vec{F}}{m} = g \sin \theta$$



الشـكل (٣ـ١) جسـيم ينزلق اسفل سطح مائل (آ) سـطح املس (ب) سـطح خشـن

لو فرضنـا سـطحاً خشـن بدلا من السـطح الاملس ، اى ان السـطح يؤثر بقـوة احتكاكيـة على الجسيـم ، عندئذ تكـون محصلـة القوى بالاتجاه ـ x مسـاوية

الى $mg \sin \theta - f$ ولكن من المعروف ان مقدار القوة الاحتكاكية يتناسب مع مقدار القوة العمودية N للتماس الانزلاقي اى $f = \mu N$ حيث ثابت التناسب μ يسمى بمعامل الاحتكاك الانزلاقي • في هذا المثال القوة العمودية N تساوى $mg \cos \theta$ كما هو واضح من الشكل ،اى

$$f = \mu mg \cos \theta$$

وهكذا تكون محصلة القوة باتجاه x مساوية الى

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

مرة اخرى القوة ثابتة ولذلك يصح استخدام المعادلات (٣ـ١١ ،)(٣ـ ١٢) و (٣ـ١٣) حيث

$$a = \frac{F}{m} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \qquad (٣\text{ـ}١٤)$$

وسيزداد انطلاق الجسيم اذا كان المقدار الجبرى داخل الاقواس موجبا ،اى اذا كانت $\theta > \tan^{-1}\mu$ وتمثل الزاوية $\tan^{-1}\mu$ عادة بالرمز ϵ ، وتسمى بزاوية الاحتكاك • اذا كانت $\theta = \epsilon$ عندئذ $a=0$ اى ان الجسيم ينزلق اسفل السطح بانطلاق ثابت • اما اذا كانت $\theta < \epsilon$ فعندئذ تكون a سالبة وبهذلك يصل الجسيم اخيرا الى حالة السكون • وعلينا ملاحظة ان اتجاه قوة الاحتكاك ينعكس ، عندما تكون الحركة الى اعلى السطح المائل ، اى بالاتجاه الموجب لمحور x — والتعجيل (بالحقيقة تباطوء) عندئذ يكون

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

٣ـ٧) القوة كدالة للموضع فقط،مفهوما الطاقة الحركية والكامنة

The Force as a Function of Position Only. The Concepts of Kinetic and Potential Energy

في امثلة عديدة يعتمد تأثير القوة على جسيم على موضعه فقط بالنسبة الى اجسام اخرى ، فمثلا تنطبق هذه الحالة على قوى الجذب الارضي والالكتروستاتيك وتنطبق كذلك على قوى الكبس او الشد المرن ،والمعادلة التفاضلية للحركة على

خط مستقيم لهذه الحالة هي :

$$\vec{F}(x) = m\ddot{x} \qquad (٣-١٥)$$

اعتيادياً يمكن حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بواحدة من طرق كثيرة • ومن الطرق المفيدة والمهمة لحلها هي كتابة التعجيل على النحو التالي :

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\frac{d\dot{x}}{dx} = v\,\frac{dv}{dx} \qquad (٣-١٦)$$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة كالاتي :

$$F(x) = mv\,\frac{dv}{dx} = \frac{m}{2}\,\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{dT}{dx} \qquad (٣-١٧)$$

حيث الكمية $T=\frac{1}{2}mv^2$ تسمى بالطاقة الحركية للجسم ويمكننا الان وضع المعادلة (٣-١٧) بصيغة التكامل اى :

$$\int F(x)\,dx = \int dT \qquad (٣-١٨)$$

الان يمثل التكامل $\int F(x)dx$ الشغل المسلط على الجسم من تأثير القوة (x) F ولنعرف دالة مثل (x) V على النحو التالي :

$$-\frac{dV}{dx} = F(x) \qquad (٣-١٩)$$

والدالة (x) V تسمى بالطاقة الكامنة • وعرفت فقط ضمن ثابت (اعتباطي) مضاف وبذلك يكون تكامل الشغل بدلالة (x) V على النحو التالي :

$$\int F(x)dx = -\int \frac{dV}{dx}\,dx = -V(x) + \text{constant}$$

ومن المعادلة (٣-١٨) يمكن كتابة

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{constant} = E \qquad (٣-٢٠)$$

وتسمى E بالطاقة الكلية • بعبارة اخرى ـ اذا كانت القوة المؤثرة دالة للموضع فقط للحركة على خط مستقيم ، فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة • وتسمى القوة في هذه الحالة محافظة[٢] Conservative • اما القوى غير المحافظة اي التي لا تتواجد لها دالة كامنة فتكون اعتياديا من نوع التبديد ، مثل الاحتكاك •

يمكن ايجاد حركة الجسيم من حل معادلة الطاقة [المعادلة (٣ـ٢٠)] للانطلاق v

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \qquad (٣ـ٢١)$$

والتي يمكن كتابتها بصيغة التكامل على النحو التالي :

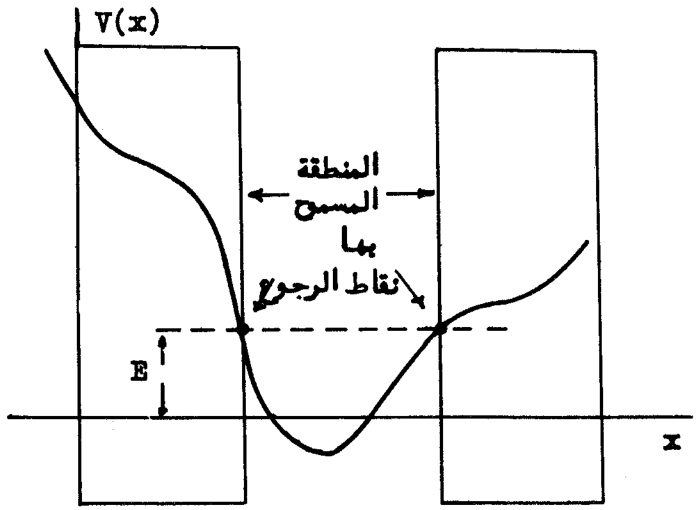
$$\int \frac{\pm\, dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(x)\right]}} = t \qquad (٣ـ٢٢)$$

وهذه تعطي t كدالة للموضع x

من المعادلة (٣ـ٢١) نرى ان الانطلاق يكون حقيقا فقط لقيم x عندما تكون V(x) اقل من الطاقة الكلية E او مساوية لها •• فيزيائيا ، وهذا يعني ان الجسيم محصور في المنطقة او المناطق التي يستوفي فيها الشرط $V(x) \leqslant E$ • اضف الى ذلك يصبح الانطلاق صفرا عندما تكون $V(x)=E$ وهذا يعني ان الجسيم يجب ان يقف ويعكس حركته في تلك النقاط التي تصح فيها المساواة • وتسمى هذه النقاط بنقاط الرجوع Turning points للحركة • وقد وضحت الحقائق المبينة اعلاه في الشكل (٣ـ٢)

---

[٢] سوف تبحث القوى المحافظة في الفصل القادم بالتفصيل •



الشكل ٣ـ٢ ، خط بياني دالة الطاقة الكامنـــــة $V(x)$ يبين المنطقة المسموح بها للحركة و نقاط الرجوع لقيمة معلومة للطاقـــة الكليـــة E

مثـــــال

ان حركـة الجسـم الحر السـقوط للحالة الـتي تكـون فيهـا القوة ثابتة ، المشـروحة اعلاه هي حالة خاصـة للحركة المحافظـة "Conservative" اذا اخترنا اتجاه x موجبا الى الاعلى ، فان قوة الجذب الارضي تكون $-mg$. ودالة الطاقـــة الكامنـة تسـاوى اذن $V = mgx + C$. هنا C ثابت اعتباطي يمكـن وضعـه مسـاويا للصفر للملائمـة . عندئذ تصبـــح الطاقـة الكلية مساوية الى

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

افرض ـ على سـبيل المثال ـ ان جسـما قد قذف الى الاعلى بانطلاق ابتدائي v_o وعنـد اختيار $x = o$ كنقطـة ابتدائية للقذف نحصل على

$$E = \frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

لمعادلة الطاقة ، وفي هذه الحالة تكون نقطة الرجوع عبارة عن اعظم ارتفاع يصله الجسيم والتي يمكن ايجادها بوضع $\dot{x} = 0$ إذن

$$\tfrac{1}{2}\, m v_0^2 = m g x_{max}$$

او

$$h = x_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

والحركة ، بدلالة تكامل معادلة الطاقة تكون على النحو التالي :

$$\int_0^x (v_0^2 - 2gx)^{-\frac{1}{2}}\, dx = t$$

$$\frac{v_0}{g} - \frac{1}{g}(v_0^2 - 2gx)^{\frac{1}{2}} = t$$

على الطالب ان يتحقق من ان هذه العلاقة تصبح نفس العلاقة بين x و t المبينة في المعادلة (٣ـ١٢) عند وضع a مساويا الى $-g$

٣ـ٨) القوة كدالة للسرعة فقط The Force as a Function of Velocity only

يحدث في اكثر الاحيان ان تكون القوة المؤثرة على جسيم ما دالة لسرعته يصح هذا مثلا في حالة مقاومة الموائع التي تؤثر على جسم يتحرك في مائع في السرع الواطئة لوحظ ان مقاومة المائع تتناسب تقريبا مع السرعة ، بينما في السرع العالية يقترب تناسبها اكثر من مربع v ، فان لم يكن هناك قوى مؤثرة اخرى فان من الممكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة على الكيفية التالية

$$F(v) = m\,\frac{dv}{dt} \qquad (٣ـ٢٣)$$

وبتكاملها مرة واحدة نحصل على t كدالة للسرعة v

$$t = \int \frac{m\,dv}{F(v)} = t(v) \qquad (٣ـ٢٤)$$

اذا فرضنا ان بامكاننا حل المعادلة السابقة للسرعة v اى

$$v = v(t)$$

فان تكاملا ثانيا يعطي الموضع x كدالة للزمن t

$$x = \int v(t)\, dt = x(t) \qquad (٣\_٢٥)$$

الطريقة الاخرى هي بتعويض $v \frac{dv}{dx}$ بدلاً من $\frac{dv}{dt}$ في المعادلة (٣ــ٢٣) لنحصل على

$$F(v) = mv \frac{dv}{dx} \qquad (٣\_٢٦)$$

وباجراء التكامل نحصل على x بدلالة v .

$$x = \int \frac{mvdv}{F(v)} = x(v) \qquad (٣\_٢٧)$$

وعند حل هذه المعادلة للسرعة v كدالة للموضع x نحصل على

$$v = v(x)$$

وعند تكامل الاخيرة نحصل على

$$t = \int \frac{dx}{v(x)} = t(x) \qquad (٣\_٢٨)$$

في الحقيقة يجب ان يكون للمعادلات (٣ــ٢٥) و (٣ــ٢٨) نفس العلاقة بين x و t .

مثال

افرض ان قالبا قد قذف بسرعة ابتدائية v_0 على سطح مستو املس ، وكان متأثرا بمقاومة الهواء التي تتناسب مع v ، اى ان $F(v) = -cv$ حيث c يمثل ثابت التناسب (المحور ــ x باتجاه الحركة) . المعادلة التفاضلية

للحركــة هي :

$$-\ cv = m\,\frac{dv}{dt}$$

والتي تعطي عند تكاملهـا

$$t = \int_{v_o}^{v} -\ \frac{m dv}{cv} = -\ \frac{m}{c}\ \ln\left(\frac{v}{v_o}\right)$$

يمكننا حلها بســهولة للســرعة v كدالة للزمن t ويكون ذلك بضرب المتساويــة بالكميــة $\frac{c}{m}$ - واخذ الاس exponent) لطرفيها فالنتيجــة تكون

$$v = v_o e^{-ct/m}$$

اى ان الســرعة تتناقص اســيا مع الزمن • وعند تكاملها للمرة الثانية نحصل على :

$$x = \int_{0}^{t} v_o e^{-ct/m}\ dt = \frac{mv_o}{c}\,(1 - e^{-ct/m})$$

نرى ، من المعادلة المذكورة اعلاه ، ان القالب لا يتعدى ابدا مســافة نهائيـــة مقدارها mv_o/c

ويمكن كذلك كتابة المعادلة التفاضليــة على النحو التالي :

$$-cv = mv\,\frac{dv}{dx}$$

كما في المعادلة (٣ـ٢٦) وبحذف العامل المشــترك v من طرفي المتســاويــة ، وتكاملها نحصل على

$$-c\int_{0}^{x} dx = m\int_{v_o}^{v} dv$$

$$-\ \frac{c}{m}\,x = v - v_o$$

او

$$v_o - \frac{c}{m}\,x = v = \frac{dx}{dt}$$

اى ان سرعة القالب تتغير خطيا مع المسافة • وبتكاملها مرة اخرى نحصل على :

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v_0 - (c/m)x} = \frac{-m}{c} \ln \left(\frac{v_0 - (c/m)x}{v_0} \right)$$

وعند حل هذه المعادلة للموضع x (بضربها بالكمية $-c/m$ واخذ الاس) ، نحصل على نفس العلاقة بين x و t التي حصلنا عليها سابقا •

٣ـ٩) القوة كدالة للزمن فقط •

The Force as a Function of Time Only:

اذا اعتمدت القوة بصورة صريحة على الزمن ، فيمكن تكامل معادلة الحركة :

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \tag{٣ـ٢٩}$$

مباشرة ، وذلك

$$\frac{dx}{dt} = \int \frac{F(t)}{m} dt = v(t) \tag{٣ـ٣٠}$$

معطية v كدالة للزمن t • وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على x كدالة للزمن t اى

$$x = \int v(t)\, dt = \int \left[\int \frac{F(t)}{m} dt \right] dt \tag{٣ـ٣١}$$

ويجب ملاحظة الحالة التي تكون فيها القوة معلومة كدالة للزمن t فقط ، فيكون حل معادلة الحركة على شكل تكامل ثنائي بسيط • اما في الحالات الاخرى جميعها فيجب استعمال الطرق المتنوعة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية لايجاد الموضع x كدالة للزمن t •

مثـــــال

قالب كان ابتدائيا في حالة السكون على سطح افقي املس ٠ في الزمن $t = 0$ ، سلطت عليه قوة افقية متزايدة تزايدا ثابتا ـ اى $F = ct$.
جد السرعة و الازاحة كدوال للزمن ٠

من المعادلة الا... ية للحركة

$$ct = m\frac{dv}{dt}$$

فان

$$v = \frac{1}{m}\int_0^t ctdt = \frac{ct^2}{2m}$$

و

$$x = \int_0^t \frac{ct^2}{2m}\,dt = \frac{ct^3}{6m}$$

حيث ان موضع القالب الابتدائي كان في نقطة الاصل ، ($x = 0$)

٣ـ١٠) الحركة الشاقولية في وسط مقاوم ـ سرعة المنتهي
Vertical Motion in a Resisting Medium-Terminal Velocity

يتعرض الجسم الساقط شاقوليا في الهواء او فى اى مائع آخر الى مقاومة اللزوجة (viscous resistance) فاذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة v مرفوعة للقوة الاولى (الحالة الخطية) ، نستطيع تمثيل قوة المقاومة بالكمية $-cv$ بصرف النظر عن اشارة v ، لان المقاومة تكون دائما معاكسة لاتجاه الحركة ٠ و ثابت التناسب c يعتمد على حجم و شكل الجسم وعلى لزوجة المائع ٠ لنأخذ المحور ـ x موجبا الى الاعلى ٠ عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$-mg - cv = m\frac{dv}{dt} \qquad (٣ـ٣٢)$$

ولما كانت القوة دالة للسرعة v لذلك نحصل على

$$t = \int \frac{mdv}{F(v)} = \int_{v_o}^{v} \frac{mdv}{-mg-cv} = -\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv}{mg + cv_o}$$

والتي يمكن حلها بسهولة للسرعة v اى

$$v = -\frac{mg}{c} + \left(\frac{mg}{c} + v_o \right) e^{-ct/m} \qquad (٣ ـ ٣٣)$$

يهبط الحد الاسي الى مقدار مهمل بعد مرور فترة زمنية كافية $(t \gg \frac{m}{c})$ وبذلك تقترب السرعة من الغاية $-mg/c$. وتسمى سرعة الغاية للجسم الساقط بـ سرعة المنتهي terminal velocity،وهي تلك السرعة التي تكون فيها قوة المقاومة مساوية تماما و معاكسة لثقل الجسم بحيث تكون القوة الكلية على الجسم تساوى صفرا • ويسمى مقدار سرعة المنتهي بانطلاق المنتهي terminal speed. فمثلا ، انطلاق المنتهي لقطرة المطر الساقطة ينحصر بين ٦م/ ثا و ٣م/ ثا وذلك يعتمد على حجمها •

المعادلة (٣ ـ ٣٣) تعبر عن v كدالة للزمن t ،وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على x كدالة للزمن t •

$$x - x_o = \int_0^t v(t)dt = -\frac{mg}{c} t + \left(\frac{m^2 g}{c^2} + \frac{mv_o}{c} \right)\left(1 - e^{-ct/m}\right) \qquad (٣ ـ ٣٤)$$

لنمثل انطلاق المنتهي $\frac{mg}{c}$ بالرمز v_t ولنكتب $\mathcal{T}$ (الذى قد نسميه بالزمن النوعي Characteristic Time) للكمية m/c. فعندئذ يمكن كتابة المعادلة (٣ـ٣٣) على الشكل التالي الاكثر اهمية

$$v = -v_t + (v_t + v_o)\, e^{-t/\mathcal{T}} \qquad (٣ ـ ٣٥)$$

وتصبح المعادلة (٣ ـ ٣٤)

$$x = x_o - v_t t + x_1(1 - e^{-t/\mathcal{T}}) \qquad (٣\text{ـ}٣٦)$$

حيث

$$x_1 = \frac{m^2 g}{c^2} + \frac{m v_o}{c} = g\,\mathcal{T}^2 + v_o \mathcal{T}$$

لذلك اذا اسقط جسم من السكون $(v_o = 0)$ فمن المعادلة (٣ـ٣٥) نستنتج بانه سوف يبلغ انطلاقا مقداره $1-e^{-1}$ مضروبا في انطلاق المنتهي في الزمن $\mathcal{T}$ و $(1-e^{-2})v_t$ في زمن $2\mathcal{T}$ ، وهلم جرا . وبعد زمن $10\mathcal{T}$ يصبح الانطلاق تقريبا مساويا للقيمة النهائية ، اى $0.99995\, v_t$

اذا كانت مقاومة اللزوجة تتناسب مع v^2 (حالة الدرجة الثانية) فالمعادلة التفاضلية للحركة بعد ان نتذكر باننا اخذنا الاتجاه الموجب الى الاعلى تكون :

$$-mg \pm cv^2 = m\frac{dv}{dt} \qquad (٣\text{ـ}٣٧)$$

وتشير الاشارة السالبة لحد المقاومة الى ان اتجاه الحركة الى الاعلى (v موجبة) كما تشير الاشارة الموجبة الى ان اتجاه الحركة الى الاسفل (v سالبة) والاشارتان ضروريتان لاية قوة مقاومة تحتوى على v مرفوعة الى عدد زوجي . وكما في الحالة السابقة يمكن تكامل المعادلة التفاضلية للحركة لتعطى t كدالة للسرعة v .

$$t = \int \frac{m\,dv}{-mg - cv^2} = -\mathcal{T}\tan^{-1}\frac{v}{v_t} + t_o \qquad \text{(للصعود)}$$

$$t = \int \frac{m\,dv}{-mg + cv^2} = -\mathcal{T}\tan^{-1}\frac{v}{v_t} + t_o' \qquad \text{(للسقوط)}$$

حيث

(يمثل الزمن النوعي)　　$\sqrt{\dfrac{m}{cg}} = \mathcal{T}$

و

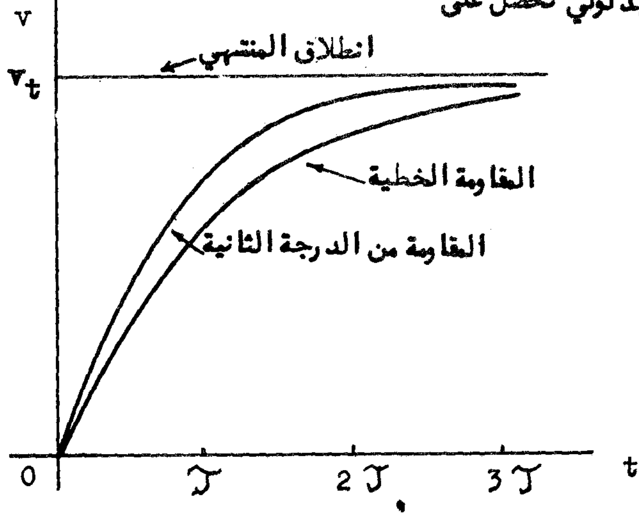
(يمثل انطلاق المنتهي)　　$\sqrt{\dfrac{mg}{c}} = v_t$

وعند الحل للسـرعة v

(٣ ـ ٣٨)　(للصعـــود)　　$v = v_t \tan \dfrac{t_o - t}{\mathcal{T}}$

(٣ ـ ٣٩)　(للســقوط)　　$v = -v_t \tanh \dfrac{t - t_o'}{\mathcal{T}}$

اذا اطلق الجسـم من السكون في الزمن 0 $t = 0$ عندئذ يكون $t_o' = 0$ ومـــن تعريف الظل الهذلولي نحصل على



الشكل (٣ ـ ٣) الخطوط البيانية لتغيير الانطلاق مع زمن جسم ساقط تحت تأثير مقاومة الهواء الخطية و من الدرجـة الثانيـة ..

$$v = -v_t \tanh \frac{t}{\mathcal{T}} = -v_t \left(\frac{e^{t/\mathcal{T}} - e^{-t/\mathcal{T}}}{e^{t/\mathcal{T}} + e^{-t/\mathcal{T}}}\right) \qquad (٣ - ٤٠)$$

مرة ثانية نرى بان انطلاق المنتهي يوصل اليه عمليا بعد مرور بضعة ازمان نوعية فمثلا عندما يكون $t = 5\mathcal{T}$ يكون الانطلاق $0.99991\ v_t$ الشكل (٣ـ٣) يبين تغيير الانطلاق مع زمن السقوط لقانوني المقاومة الخطية ومن الدرجة الثانية .

من المفيد ملاحظة ان الزمن $\mathcal{T}$ يساوي v_t/g في الحالتين الخطية ومن الدرجة الثانية . فمثلا ـ اذا كان انطلاق المنتهي لمظلي يساوي ٢ر١ متر في الثانية فالزمن النوعي يساوي ٢ر١ مترفي الثانية \ ٨ر٩ متر في (الثانية)^2 ويساوي $\frac{١}{٨}$ ثانية .

ويمكن تكامل العلاقات (٣ـ٣٨) و (٣ـ٣٩) لتعطي علاقات صريحة للموضع x كدالة للزمن t .

٣ـ١١) تغيير الجاذبية مع الارتفاع

Variation of Gravity with Height

لا تكون قوة جذب الارض فوق سطحها ثابتة بل متغيرة وفقاً لقانون التربيع العكسي للمسافة (قانون نيوتن للجاذبية)[٣] . اذن قوة جذب الارض على جسم كتلته m هي :

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (٣ - ٤١)$$

---

(٣) سندرس قانون نيوتن للجاذبية بصورة مفصلة في الفصل السادس .

حيث G يمثل ثابت الجاذبية و M كتلة الارض و r المسافة بين مركز الكرة الارضية والجسم • اذا اهملنا مقاومة الهواء تكون المعادلات التفاضلية للحركة على النحو التالي

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

وعند كتابة $\ddot{r} = \dot{r}\ \frac{d\dot{r}}{dr}$ نستطيع ان نكامل كما يلي

$$m\int \dot{r}\,d\dot{r} = -GMm\int \frac{dr}{r^2}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \qquad (٣\_٤٢)$$

والتي فيها E هو ثابت التكامل • وهذه بالضبط معادلة الطاقة • مجموع الطاقة الحركية (الحد الاول) والطاقة الكامنة ($-\frac{GMm}{r}$) يبقى ثابتا اثناء حركة الجسم الساقط •

لنطبق المعادلة المذكورة اعلاه على حالة قذيفة رميت الى الاعلى من سطح الارض بانطلاق ابتدائي مقداره v_o فالثابت E اذن يكون

$$\tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{r_e} = E$$

حيث r_e يمثل نصف قطر الكرة الارضية• والانطلاق على اي ارتفاع x عندئذ يكون

$$v^2 = v_o^2 + 2GM\left(\frac{1}{r_e+x} - \frac{1}{r_e}\right) \qquad (٣\_٤٣)$$

والان قوة جذب الارض عند سطحها هي

$$-\frac{GMm}{r_e^2} = -mg$$

والتعجيل الارضي على السطح اذن يكون

$$g = \frac{GM}{r_o^2}$$

لذلك يمكن كتابة علاقـة الانطلاق على النحو التالي

$$v^2 = v_o^2 + 2g\left(\frac{r_e^2}{r_e + x} - r_e\right)$$

$$= v_o^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1} \qquad (٣ـ٤٤)$$

وتختصر المعادلة اعلاه الى المعادلة المالوفة لمجال الجاذبية المنتظـم •

$$v^2 = v_o^2 - 2gx$$

اذا كانت x صغيرة جدا بالمقارنة مع r_e بحيث يمكن اهمال الحد $\frac{x}{r_e}$ بالنسـبة الى الواحـد

نحصل على نقطة رجـوع حركة القذيفـة • اى اعظم ارتفاع تبلغه وذلك بوضع $v=0$ وحل المعادلة للموضع x • فالنتيجـة تكـون

$$x_{max} = h = \frac{v_o^2}{2g}\left(1 - \frac{v_o^2}{2gr_e}\right)^{-1} \qquad (٣ـ٤٥)$$

مرة اخرى نحصل على العلاقة الاعتيادية

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

اذا امكن اهمال الحـد الثاني

اخيرا نطبق العلاقة الدقيقة (٣ـ٤٥) لايجاد قيمة v_o التي تعطي h قيمة لا نهائيـة •؟ هـذه تسمى بانطلاق الافلات escape speed ومن الواضح يمكن ايجاد قيمتهـا بوضع الكمية داخل الاقواس مسـاوية للصفر ـ النتيجـة هي :

هذه تعطي

$$v_e = (2gr_e)^{\frac{1}{2}}$$

لقيمـــــة انطلاق الافلات العددية من سطح الارض

$$v_e \simeq 11 \text{ km/sec.}$$

ان معدل سرعة جزيئة الهواء (N_2, O_2) في جو الكرة الارضية يساوى حوالي ٥ر٠ كم/ثا [٤] الذى يصغر انطلاق الافلات بكثير ولذلك تحتفظ الارض بجوها عكس ذلك ، القمر ، الخالي من الجو لان انطلاق الافلات على سطحه اصغر منه على سطح الارض بسبب صغر كتلته ، ولهذا السبب اختفى اخيرا الاوكسجين والنتروجين من على سطحه ، ومع ذلك فان جو الارض هو بدوره ايضا لا يحتوى على كمية ذات اهمية تذكر من الهيدروجين بالرغم من كثرته في الكون ككل . لقد ترك الهيدروجين جو الارض منذ زمن بعيد لان الانطلاق الجزيئي من الكبر (بسبب صغر كتلة جزيئة الهيدروجين) بحيث ان هناك عددا كبيرا من جزيئات الهيدروجين انطلاقها في اية لحظة يفوق انطلاق افلات الارض .

٣ــ١٢) القوة المعيدة الخطية ــ الحركة التوافقية

Linear Restoring Force. Harmonic Motion

واحدة من اهم حالات الحركة على خط مستقيم من الناحية العملية والنظرية هي تلك الحركة التي تحدثها قوة معيدة خطية Linear Restoring Forc هذه القوة يتناسب مقدارها مع ازاحة الجسيم من موضع الاستقرار واتجاهها يكون دائما مضادا لاتجاه الازاحة . قوة كهذه يصيبها وتر مرن او نابض يخضعان لقانون هوك

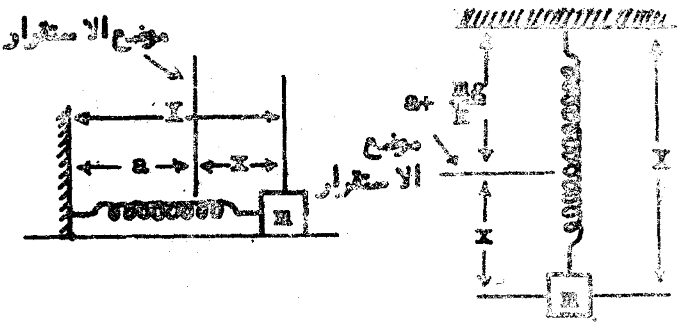
$$F = -k(X - a) = -kx \qquad (٣\text{ــ}٤٦)$$

---

(٤) وفقا للنظرية الحركية Kinetic Theory ان معدل انطلاق جزيئة الغاز يساوى $(3kT/m)^{\frac{1}{2}}$ حيث k يمثل ثابت بولتزمان ويساوى ١٫٣٨ × ١٠$^{-١٦}$ ارك لكل درجة ، و T درجة الحرارة المطلقة و m كتلة الجزيئة .

حيث X يمثل الطول الكلي و a طول النابض عندما يكون غير مضغوط (الثقل يساوي صفرا) ، يمثل المتغير $x=X-a$ ازاحة النابض من موضع الاستقرار ويسمى ثابت التناسب k بالمرونة Stifness.

لنفرض ان جسما كتلته m قد ربط بالنابض كما هو مبين في الشكل (٣ـ ٤ أ)



(أ) (ب)

الشكل (٣ـ ٤) تمثيل التذبذب التوافقي الخطي بواسطة جسم كتلته m ونابض (أ) الحركة الافقية (ب) الحركة الشاقولية

فالقوة المؤثرة على الجسم تعطى من المعادلة (٣ ـ ٤٦) .

لنفرض ان نفس النابض والجسم علقا شاقوليا كما هو مبين في الشكل (٣ـ ٤ ب) فالقوة الكلية التي تؤثر على الجسم الان هي :

$$F = -k\,(X - a) + mg \qquad (٣ـ ٤٧)$$

حيث الاتجاه الموجب نحو الاسفل . والان لنقيس x في الحالة الاخيرة بالنسبة لموضع الاستقرار الجديد ، اي ان $x=X-a-mg/k$

هذا يعطي $F= -kx$ مرة ثانية وهكذا المعادلة التفاضلية للحركة

في اى من الحالتين تكون

$$-kx = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (٣\text{—}٤٨)$$

تصادفنا المعادلة التفاضلية للحركة المذكورة اعلاه في مسائل فيزيائية متنوعة وكثيرة • في المثال الخاص الذى نستخدمه هنا ، الثابتان m ، k يمثلان كتلة الجسم و مرونة النابض على التتالي و الازاحة x هي مسافة • وكما سنرى فيما بعد ان نفس هذه المعادلة ستستعمل في حالة البندول ولكن الازاحة تكون زاوية و الثوابت هي التعجيل الارضي و طول البندول • كما ان هذه المعادلة تطبق في بعض الدوائر الكهربائية الخاصة ، ولكن الثوابت تمثل بيرمترات (Parameters) الدائرة ، والكمية x تمثل التيار الكهربائي او الفولتية

يمكن حل المعادلة (٣—٤٨) بطرق عديدة • و هناك صنف مهم من المعادلات التفاضلية يعرف بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة [٥] • عدد كبير من المعادلات التفاضلية في الفيزياء ان لم تكن معظمها هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية • و سنستخدم طريقة التجربة لحل المعادلة (٣—٤٨) والتي ستكون فيها الدالة Ae^{qt} هي تجربة الحل و q هو ثابت علينا ايجاد مقداره • فاذا كان $x=Ae^{qt}$ هو نمط الحل ، عندئذ يجب ان نحصل لجميع قيم t على

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

وعند اختصار العوامل المشتركة نحصل على المعادلة التالية [٦]

---

(٥) معادلة الرتبة النونية العامة لهذا النوع هي $c_n\frac{d^nx}{dt^n}+\dots+c_2\frac{d^2x}{dt^2}+c_1\frac{dx}{dt}+c_0=b(t)$

وتسمى هذه المعادلة متجانسة homogeneous اذا كانت $b = 0$

(٦) هذه المعادلة تسمى بالمعادلة المساعدة

اى ان

$$mq^2 + k = 0$$

$$q = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\,\omega_o$$

حيث

$$\omega_o = \sqrt{k/m} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

ولما كانت حلول المعادلة التفاضليــة الخطية تجمــع (اى •اذا كان f_1 ، f_2 حلين • عندئذ مجموعهما f_1+f_2 يكون حلاً ايضا) اذن الحــل العــــام للمعادلــة (٣ ــ ٢٨) هو

$$x = A_+e^{i\,\omega_o t} + A_-e^{-i\,\omega_o t} \qquad (٣\text{ــ}٤٩)$$

ولما كان $e^{iu}=\cos u + i \sin u$ • فالاشكال الاخرى للحلول هــــي

$$x = a \sin \omega_o t + b \cos \omega_o t \qquad (٣\text{ــ}٥٠)$$

او

$$x = A \cos (\omega_o t + \theta_o) \qquad (٣\text{ــ}٥١)$$

وتحسب قيم ثوابت التكامل في الحلول المذكورة توا من الشــروط الابتدائية وبالتعـــويض المباشــر يمكن التحقق من ان جميع التعابير الجبرية الثلاثة هي حلـــــــــول للمعادلة (٣ــ٤٨) •

الحركة هي تذبذب منحني الجيب للازاحـــة x • ولهذا السـبب تسـمى غالبــا المعادلة (٣ــ٤٨) بالمعادلة التفاضليــة للتذبذب التوافقي او المتذبـــذب الخطـــي •

يســمى المعامل ω_o بالتردد الزاوى angular frequency والقيمة العظمــى للازاحــة x بســـعة التذبذب • وهو الثابت A في المعادلة (٣ــ٥١) • او $(a^2+ b^2)^{\frac{1}{2}}$ في المعادلة (٣ــ٥٠) وزمن الذبذبـــة "Period" T_o هو الزمن اللازم لـــدورة كاملــة • كما هو مبين في الشــكل (٣ــ٥) •اى ان زمن الذبذبـــة هو الزمن الـــذى يزداد فيه ωt بمقدار 2π • اى

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (٣ـ٥٣)$$

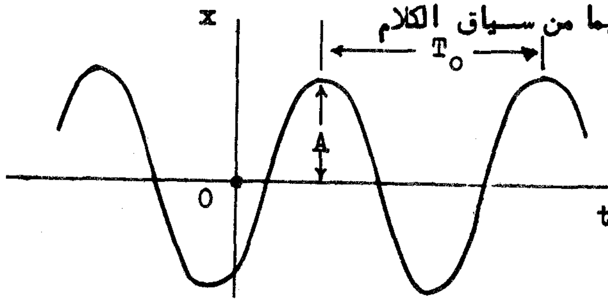
ويعرّف التردد الخطي f_o للمتذبذب بعدد الدورات في وحدة الزمن اذن

$$\omega_o = 2\pi\ f_o$$

و

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

تستعمل كلمة "التردد" عادة للتردد الزاوى او الخطي ويمكن التمييز بينهما من سياق الكلام



الشكل (٣ـ٥) العلاقة بين الازاحة والزمن للمتذبذب التوافقي

مثال

تمطط نابض خفيف بمقدار b عندما يعلق به قالب كتلته m . فاذا سحب القالب الى الاسفل مسافة ℓ من موضع استقراره وترك في الزمن $t=o$ جد محصلة الحركة للزمن t .

اولا ـ لايجاد مرونة النابض ، نلاحظ من شرط التوازن السكوني ان

$$F = -kb = -mg$$

اى

$$k = \frac{mg}{b}$$

و نجمتين بعيدتين كنقاط مرجعية • و قد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

٣ـ٣) الكتلة و القوة • قانوني نيوتن الثاني و الثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المالوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه (او ايقافه) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب و القياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسيمين B,A فكيف نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استنباطها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسيمين يؤثر احدهما على الاخر كربطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسيمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه و النسبة بينهما ثابتة (على فرض ان التعجيل معطي في المحاور النيوتونية و اخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسيمين A و B فقط) و يمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا و الاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt}\mu_{BA} \qquad (٣ـ١)$$

الثابت μ_{BA} يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم B بالنسبة الى A من المعادلة (٣ـ١) ينتج ان $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$ اذن قد نعبر عن μ_{BA} بالنسبة $\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$ حيث استعمل جسم ما كمعيار لوحدة القصور الذاتي • الان النسبة m_B / m_A يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاى جسم ثالث C

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$

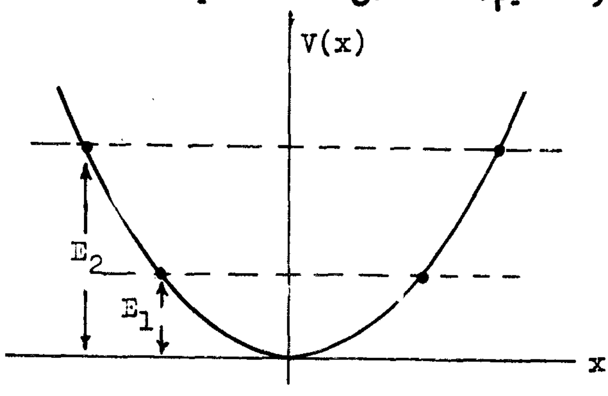
وهذه يمكن تكاملها للحصول على t كدالة للازاحة x كالاتي :ـ

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2E/m) - (k/m)x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) + C$$

حيث

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

و C هو ثابت التكامل • عند حل المعادلة المتكاملة للموضع x كدالة للزمن t نجد بان النتيجة التي سوف نحصل عليها هي نفس العلاقة التي حصلنا عليها في البند السابق ، سوى اننا الان نحصل على قيمة واضحة للسعة A • ويمكننا ايضا ايجاد السعة مباشرة من معادلة الطاقة (٣ ــ ٥٥) وذلك بملاحظة ان قيمة x يجب ان تقع بين $\sqrt{2E/k}$ و $-\sqrt{2E/k}$ - لكي تكون $\dot{x}$ حقيقية • لقد وضحت هذه النتيجة في الشكل (٣ ــ ٦) الذي يبين دالة الطاقة الكامنة ونقاط رجوع الحركة لقيم مختلفة من الطاقة الكلية E .



الشكل (٣ــ٦) مخطط دالة الطاقة الكامنة لمتذبذب توافقي • وقد وضحت نقاط الرجوع التي تعرّف السعة لقيمتين من الطاقة الكلية•

نلاحظ من معادلة الطاقــة ان القيمــة العظمى لـ $\dot{x}$ تحدث عندما يكــون $x=0$
والتي ســنســميها v_{max} وبذلك نحصل على

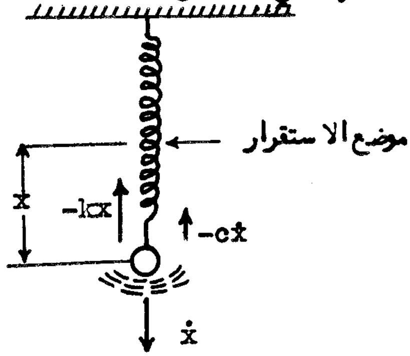
$$E = \tfrac{1}{2}mv_{max}^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

او

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A = \omega_o A \qquad (٣\_٥٧)$$

(٣_١٤) الحركــة التوافقيــة المتضائلــة Damped Harmonic Motion

التحليل الســابق للمتذبذب الــتوافقي كان مثاليا الى حــد ما لاننا اخفقنــا في اخــذ قوى الاحتكاك بنظر الاعتبار ٠ وهذه تتواجــد دائما ، بمقدار ما ، في الاجهزة الميكانيكيــة ٠ كما في الدوائر الكهربائيــة التي تحتوى دائما علــى كميــة معينــة من المقاومــة ٠ وعلى ســبيل المثال ، لنعتبر حركــة جســـم معلق بنابض مرونتــه k . وســنفرض وجــود قوة معيقــة لزجــه تتغير خطيــا مع الانطــلاق (كما في البند ٣ ــ ٨) ، اى ، كالتي تســببهــا مقاومة الهواء وقد وضحت هذه القوى في الشــكل (٣ ــ ٧) ٠



الشــكل (٣ ــ٧) المتذبذب التوافقي المتضائــل

اذا كانت x تمثــل الازاحــة موضع الاســتقرار ، فان القــوة المعيــــدة التي يؤثر بهــا النابض هي $-kx$ والقوة المعيقــة هي $-c\dot{x}$ حيث c يمثل ثابت التناســب ٠ اذن تصبح المعادلة التفاضلية للحركـــــــة $F = m\ddot{x}$

على النحو التالي :

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (٣ــ٥٨)$$

مرة اخرى كالسابق سنستعمل الدالة الاسية Ae^{qt} كحل تجريبي للمعادلة و هي حل اذا كان

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + c \frac{d}{dt} (Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

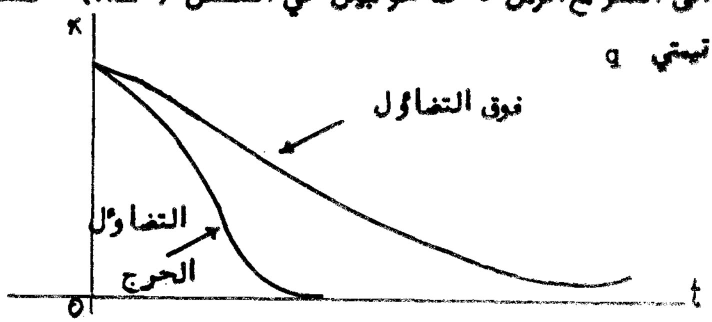
لجميع قيم t ، و هذه ستكون الحالة اذا استوفت q المعادلة المساعدة التاليـة :

$$mq^2 + cq + k = 0$$

و التي نحصل على جذورها بطريقة الدستور لمعادلات الدرجة الثانيةالمعروفة

$$q = \frac{-c \pm (c^2 - 4mk)^{½}}{2m} \qquad (٣ــ٥٩)$$

في الحالات التي تكون فيها $c^2 > 4mk$ (فوق التضاؤل over damping) و $c^2 = 4mk$ (حالة التضاؤل الحرجة critical damping) تكون q حقيقية و سالبة ، لذلك تكون الحركة غير ذبذبية و تهبط الازاحة x اسيا الى الصفر مع الزمن ، كما هو مبين في الشكل (٣ــ٨) ، لنسمي $-\gamma_1$ و $-\gamma_2$ قيمتي q



الشكل (٣ــ٨)

مخططا العلاقة بين الازاحة و الزمن للحالتين فوق التضاؤل و التضاؤل الحرج لمتذبذب توافقـي

المبينة بالمعادلة (٣ــ٥٩) لحالة فوق التضاؤل • عندئذ يمكن كتابة الحل العام على النحو التالي :

$$x = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad (٣ــ٦٠)$$

في حالة التضاؤل الحرج تكون جذور المعادلة متساوية و الحل العام يكون كما يلي :

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t) \qquad (٣ــ٦١)$$

حيث $\gamma = c/2m$ و يمكن تحقيق الحل المذكور اعلاه بالتعويض المباشر •
اذا كان ثابت المقاومة c صغيرا بحيث يكون $c^2 < 4mk$ نحصل على الحالة الثالثة (حالة دون التضاؤل Underdamping). و في هذه الحالة تكون q خيالية • وجذرا المعادلة المساعدة يكونان عددين مركبين متوافقين و تعطي الحركة بالحل العام التالي :

$$x = A_+ e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + A_- e^{(-\gamma - i\omega_1)t} \qquad (٣ــ٦٢)$$

حيث

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \qquad (٣ــ٦٣)$$

عند استعمال العلاقة $e^{iu} = \cos u + i \sin u$
نرى ان الحل يمكن كتابته على النحو التالي :

$$x = e^{-\gamma t}(A_+ e^{i\omega_1 t} + A_- e^{-i\omega_1 t})$$

او

$$= e^{-\gamma t}\left[(iA_+ - iA_-)\sin \omega_1 t + (A_+ + A_-)\cos \omega_1 t\right]$$

$$x = e^{-\gamma t}(a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \qquad (٣ــ٦٤)$$

حيث

$$b = A_+ + A_- \,, \quad a = i(A_+ - A_-)$$

يمكننا كذلك كتابة الحل على النحو التالي

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta_o) \qquad (٣ــ٦٥)$$

حيث $\theta_0 = -\tan^{-1}(\frac{b}{a})$, $A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

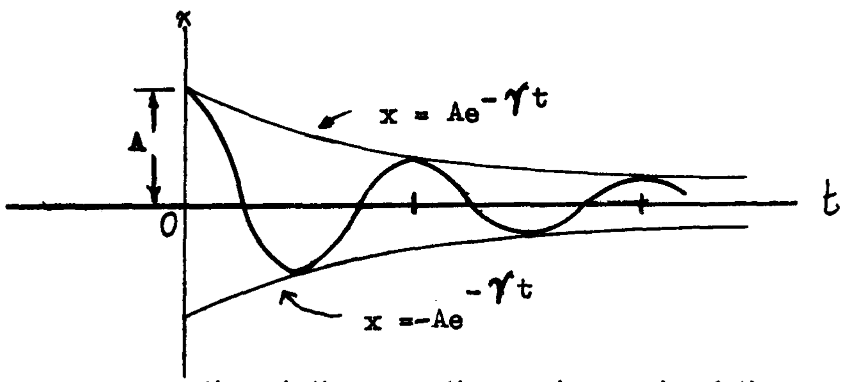
تبين الصيغة الحقيقية للحل ان الحركة ذبذبية وان السعة $Ae^{-\gamma t}$ تتضائل اسيا مع الزمن • اضف الى ذلك اننا نلاحظ ان التردد الزاوي للتذبذب ω_1 هو اقل من المتذبذب الحر ω_0 ويسمى التردد ω_1 بالتردد الطبيعي •

في حالة التضاؤل الضعيف ، اذا كانت γ صغيرة جدا بالمقارنة مع ω_0 نحصل على العلاقة المقربة التالية :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \qquad (٣\text{–}٦٦)$$

والتي تنتج من فك الطرف الايمن للمعادلة (٣–٦٣) باستخدام نظرية ذات الحدين واستبقاء الحدين الاولين فقط ••

يبين الشكل (٣–٩) رسم لمنحني الحركة • ونستنتج من المعادلة (٣– ٦٥) ان المنحنيين $x = Ae^{-\gamma t}$, $x = -Ae^{-\gamma t}$ يكونان غلافا" لمنحني الحركة ، لان عامل الجيب تمام يأخذ القيم بين + ١ و –١ ، بضمنها + ١ و –١ والتي يمس فيها منحني الحركة ، الغلاف ، لذلك تنفصل نقاط التماس بفترة زمنية مقدارها نصف مدة الذبذبة ، او π/ω_1 ، ولكن هذه النقاط هي ليست تماما القيم العظمى والصغرى للازاحة x • وقد ترك للطالب ايجاد



الشكل (٣– ٩) منحني العلاقة بين الازاحة والزمن لمتذبذب توافقي في حالة التضاؤل

قيم t التي تأخذ فيها الازاحة قيمها العظمى والصغرى •

اعتبارات الطاقة Energy Consideration

الطاقة الكلية لمتذبذب توافقي متضائل تساوي في أية لحظة مجموع الطاقة الحركية $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ والطاقة الكامنة $\frac{1}{2} kx^2$ ، اى

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

وقد رأينا ان هذا المجموع ثابت للمتذبذب غير المتضائل •
لنفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن t لايجاد معدل التغيير الزمني لـ E . اى

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

ولكن من المعادلة التفاضلية للحركة ، اى المعادلة (٣ــ ٥٨) والتي هي

$$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$$

نحصل على

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \qquad (٦٧ـ٣)$$

وهذه دائما سالبة وتمثل معدل تبدد الطاقة الى حرارة بالاحتكاك •

امثلــــة

١ــ علق جسيم كتلته m بنابض مرونته k • وكان التضاؤل بحيث $\gamma = \omega_0/4$
اوجد التردد الطبيعي •
من المعادلة (٣ ــ ٦٣)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{16}} = \omega_0\sqrt{\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{15}{16}}$$

٢ــ في المثال المذكور اعلاه اوجد النسبة بين سعتي ذبذبتين متعاقبتين •

من النظرية السابقة ، تكون النسبة كالاتي :

$$\frac{Ae^{-\gamma T_1}}{A} = e^{-\gamma T_1}$$

حيث ان

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

اذن في مثالنا

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_o}\sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{2\pi}{4\gamma}\sqrt{\frac{16}{15}}$$

او

$$\gamma T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{16}{15}} = 1.56$$

اذن النسبة بين ذبذبتين متعاقبتين هي :

$$e^{-1.56} = 0.21.$$

٣ ـ ١٥) الحركة التوافقية الاضطرارية ـ الرنين

Forced Harmonic Motion. Resonance

سندرس في هذا البند حركة المتذبذب التوافقي المتضائل المدفوع بقوة خارجية توافقية ، اى قوة تتغير بدالة جيبية sinusoidally مع الزمن . افرض ان لهذه القوة المسلطة F_{ext} ترددا زاويا ω وسعة معينة F_o وبذلك يمكن تمثيلها

$$F_{ext} = F_o \cos(\omega t + \theta)$$

و من الافضل استخدام الصيغة الاسية

$$F_{ext} = F_o e^{i(\omega t + \theta)}$$

بدلا من الجيبية (٧) . عندئذ تكون القوة الكليـة مساوية لمجموع القـوى الثـلاث التاليـة ــ القوة المعيـدة للمرونـة $-kx$ ، قوة التضاؤل للزوجـة $-c\dot{x}$ ، القوة الخارجيـة F_{ext} . لذلك تصبح المعادلة التفاضليـة

$$-kx - c\dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \qquad (٣ ــ ٦٨)$$

يتكون حل المعادلة التفاضليـة الخطيـة المذكورة اعلاه من مجموع الجزئيـن التاليـين الاول من حل المعادلة المتجانسـة $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ والـذى سبق وان وجـدناه في البنـد السـابق والثاني اى حل خاص للمعادلة . كما رأينا ، ان حل المعادلة المتجانسـة يمثل تذبذبا يتضائل في اخر الامر الى الصفر والذى يسـمى بالحـد العابر Transient term. ان ما يهمنا هو الحـل الذى يعتمـد على طبيعـة القوة المسـلطة . ولما كانت سـعة هذه القوة ثابتـة وتتغير دالتها جيبيا مع الزمن ، فمن المعقول توقع امكانيـة ايجـاد حل تكـون فيـه الازاحـة x دالـة جيبية متغيرة مع الزمن ايضا . اذن ، لشـرط حالـة الاسـتقرار ، سـنجرب حلا من النوع التالي

$$x = Ae^{i(\omega t + \theta')}$$

---

(٧) يمكن كتابـة الصيغـة الاسـية على النحو التالي

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t + \theta) + iF_0 \sin(\omega t + \theta)$$

والمعادلة التفاضليـة الناتجة تكون مسـتوفية اذا تساوت الاجزاء الحقيقيـة والخياليـة لجانبي المعادلـة .

اذا كان هذا " الحدس صحيحا فيجب ان تصح المعادلة

$$m \frac{d^2}{dt^2}\left[Ae^{i(\omega t+\theta')}\right] + c\frac{d}{dt}\left[Ae^{(i\omega t+\theta')}\right] + kAe^{i(\omega t+\theta')}$$

$$= F_o e^{i(\omega t + \theta)}$$

لكل قيم t. وهذه تختصر بعد اجراء العمليات الرياضية واختصار العوامل المشتركة الى

$$-m\omega^2 A + i\omega cA + kA = F_o e^{i(\theta-\theta')} = F_o\left[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')\right]$$

وعند مساواة الاجزاء الحقيقية والخيالية لطرفي المعادلة نحصل على :

$$A(k - m\omega^2) = F_o \cos\phi \qquad (٣ - ٦٩)$$

$$c\omega A = F_o \sin\phi \qquad (٣ - ٧٠)$$

حيث فرق الطور او زاوية الطور $\theta' - \theta$ مثلت بالرمز ϕ ويقسمة المعادلة الثانية على الاولى واستخدام المتطابقة $\sin\phi/\cos\phi = \tan\phi$ نحصل على

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (٣ - ٧١)$$

وبتربيع طرفي المعادلتين (٣ ـ ٦٩) و (٣ ـ ٧٠) وجمعهما ثم استخدام المتطابقة $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ نجد ان

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2A^2 = F_o^2$$

وبحلها لسعة حالة الاستقرار التذبذبية A نحصل على

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \qquad (٣ - ٧٢)$$

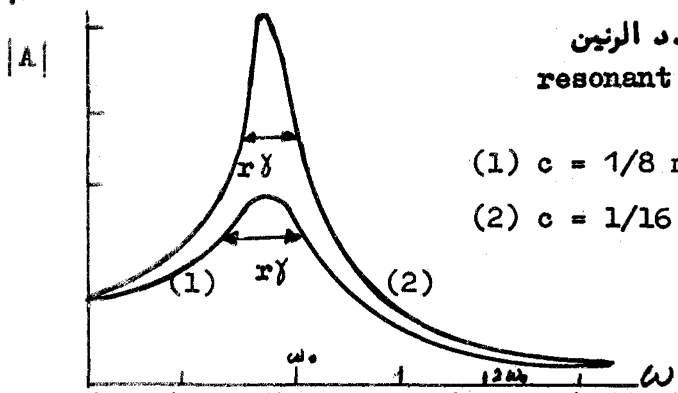
وبدلالة الاختصارات $\omega_o = \sqrt{k/m}$ ، $\gamma = c/2m$ نستطيع ان نكتب

$$\tan \emptyset = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad (٣ - ٧٣)$$

و

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad (٣ - ٧٤)$$

المعادلة المذكورة اعلاه والتي تبين العلاقة بين السعة A والتردد الدافع المؤثر Impressed driving frequency هي من العلاقات الاساسية المهمة ٠ يرينا المنحني في الشكل (٣ ــ ١٠) ان A لها قيمة عظمى لتردد معلوم ω_r والذى يسمى بتردد الرنين resonant frequency



الشكل (٣ ــ ١٠) تغيير منحني السعة مع التردد الدافع

لايجاد تردد الرنين ، نحسب $dA/d\omega$ من المعادلة (٣ ــ ٧٤) ونضع النتيجة مساوية للصفر ٠ وعند حل المعادلة الناتجة لـ ω نجد ان تردد الرنين يكون :

$$\omega = \omega_r = (\omega_o^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \qquad (٣ - ٧٥)$$

في حالة التضاؤل الضعيف ، اى عندما يكون ثابت التضاؤل c صغيرا جدا $c \ll 2\sqrt{mk}$ او ما يكافئ ذلك اذا كان $\gamma \ll \omega_o$ عندئذ نرى ان تردد

الرنين ω_r يكون تقريبا مساويا لتردد متذبذب حر مستمر دون تضاؤل ـ
فاذا استخدمنا نظرية ذي الحدين لفك الطرف الايمن من المعادلة (٣ ـ ٧٥)
واحتفظنا بالحدين الاول والثاني فقط نحصل على :

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0} \qquad (٣ ـ ٧٦)$$

وبمقارنة المعادلتين (٣ ـ ٧٥) و (٣ ـ ٧٦) مع المعادلتين (٣ ـ ٣) و (٣ ـ ٦٦) اللتين تعطيان تردد التذبذب ω_1 لمتذبذب حر مستمر بوجود التضاؤل . لنفرض ان $\in$ تمثل الكمية γ^2/ω_0 . عندئذ يمكننا كتابة :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \tfrac{1}{2} \in \qquad (٣ ـ ٧٧)$$

لقيمة التردد الطبيعي التقريبية كذلك

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \in \qquad (٣ ـ ٧٨)$$

لقيمة تردد الرنين التقريبية .

سعة حالة الاستقرار في تردد الرنين ، يمكن الحصول عليه ، من المعادلات (٣ ـ ٧٤) ، و (٣ ـ ٧٥) والذي سنسميه A_{max} والنتيجة هي :

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{F_0}{c\,(\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (٣ ـ ٧٩)$$

ويمكننا اهمال γ^2 في حالة التضاؤل الضعيف وكتابة

$$A_{max} \simeq \frac{F_0}{2\gamma m\,\omega_0} = \frac{F_0}{c\,\omega_0} \qquad (٣ ـ ٨٠)$$

اذن تصبح سعة التذبذب التأثري في شرط الرنين كبيرة جدا اذا كان ثابت التضاؤل c صغيرا جدا وبالعكس . قد يكون من المرغوب فيه او لا يكون ـ الحصول على سعة عالية للرنين في الاجهزة الميكانيكية . فمثلا يستعمل سند او نابض في المحرك الكهربائي لتقليل انتقال الاهتزازات وتختار مرونة هذه المساند

بحيث تأمن ابتعاد محصلة تردد الرنين عن تردد المحرك المستمر .

في اغلب الاحيان ، تكون حدة قمة الرنين مهمة . لنفرض حالة التضاؤل الضعيف $\omega_0 \gg \gamma$. عندئذ يكون في امكاننا اجراء التعويضات التالية في علاقة السعة حالة الاستقرار ، اي في المعادلة (٣ ـ ٧٤)

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \quad \gamma\omega \simeq \gamma\omega_0$$

هذا وعلاقة A_{max} يكون باستطاعتنا كتابة معادلة السعة بالصيغة التالية :

$$A = \frac{A_{max}\,\gamma}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}} \qquad (٣ ـ ٨١)$$

عندئذ ترينا المعادلة المذكورة اعلاه انه عندما تكون $\gamma = |\omega_0 - \omega|$ او ما يكافئ ذلك ، اذا كانت

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma$$

عندئذ

$$A^2 = \tfrac{1}{2} A^2_{max}$$

وهذا يعني ان γ هي مقياس لعرض منحني الرنين . لذلك 2γ تمثل فرق التردد بين النقطتين اللتين تهبط فيهما الطاقة بمقدار نصف طاقة الرنين ، بسبب تناسب الطاقة مع A^2 . كما هو واضح من الشكل (٣ ـ ١٠)

هناك طريقة اخرى لتوضيح حدة قمة الرنين وذلك بدلالة البرمتر Q الذي يسمى بمعامل النوعية Quality Factor للرنين وتعريفه هو

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} \qquad (٣ ـ ٨٢)$$

اوللتضاؤل الضعيف

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

لذلك العرض $\Delta\omega$ في منتصف نقطتي الطاقة تقريبا يساوى

$$\Delta\omega = 2\gamma \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

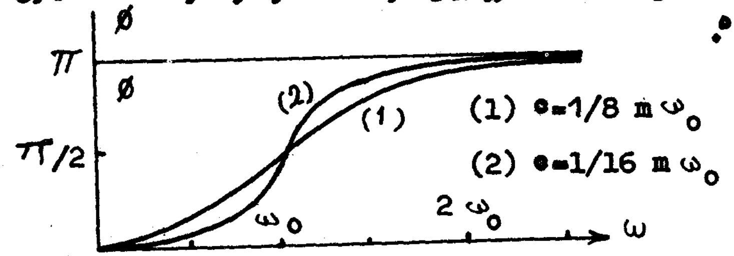
اولما كانت $\omega = 2\pi f$ اذن

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{Q} \qquad (٣ ـ ٨٣)$$

والتي تعطي العرض الجزئي لقمة الرنين .

تستخدم متذبذبات بلورات الكوارتز المدفوعة كهربائيا للسيطرة على محطات ارسال المذياع . وتقدر Q لبلورات الكوارتز في هذه التطبيقات بحوالي 10^4 . هذه القيم العالية لـ Q تضمن بقاء تردد التذبذب تماما في تردد الرنين .

تعطي المعادلة (٣ـ ٧٣) فرق الطور $\emptyset$ بين القوة الدافعة المسلطة والاستجابة response وقد رسمت هذه المعادلة في الشكل (٣ـ١١) ، الذي يبين $\emptyset$ كدالة لـ ω . نرى ان فرق الطور يكون صغيراً عندما تكون ω صغيرة بحيث تكون الاستجابة متوافقة الطور (In phase) مع القوة الدافعة . وقد ازدادت $\emptyset$ الى $\pi/2$ في تردد الرنين ولذلك تكون الاستجابة مخالفة الطور بـ 90° ـ للقوة الدافعة في الرنين . واخيرا تقترب قيمة $\emptyset$ من π لقيم عالية جدا من ω ، اذن خلاف الطور بين حركة المنظومة والقوة الدافعة يكون مساويا الى 180° .



الشكل (٣ ـ ١١) منحني العلاقة بين زاوية الطور والتردد الدافع

امثلـــــة

١ـــ احســب تردد الرنين و عامل النوعيــة للمتذبذب المتضائل في المثال (١) صفحــة (٩١) عندنا

$$\omega_r = (\omega_o^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$$
$$= (\omega_o^2 - 2\,\omega_o^2/16)^{1/2}$$
$$= \omega_o \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{\frac{7}{8}}$$

لتردد الرنين في المقياس الزاوي • و يعين عامل النوعية كما يلي :

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{\omega_o(7/8)^{1/2}}{2(\omega_o/4)} = 2\sqrt{7/8} = 1.87$$

٢ ـــ اذا كان التردد المسلط يساوى $\omega_o / 2$ للمتذبذب المذكور اعــــلاه جــد زاويــة الطور ϕ

من المعادلة (٣ ـــ ٧٣) • عندنا

$$\tan\phi = \frac{2(\omega_o/4)(\omega_o/2)}{\omega_o^2 - (\omega_o/2)^2} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

اذن

$$\phi = \tan^{-1}(1/3) = 18.5^o$$

٣ـــ ١٦) الحركة تحت تأثير قوة دافعــة توافقيــة غير جيبيــة

Motion under a Nonsinusoidal Driving Force

من الضروري اســتخدام طريقــة اكثر تعقيدا من التي اســتخدمت في البنــــد الســابق لاجل تعيين حركة متذبذب توافقي تحت تأثير قــوة دافعة توافقيــة و لكن غير جيبيــة و من الملائم اســتخدام قاعدة التداخل Principle of superposition لـــهــــذه الحالـــــــــــــة العامــــــة وتنص هذه القاعدة ان امكن حل القوة المسلطة F (t) على متذبذب الى المجموع

$$F(t) = \sum_n F_n(t)$$

بحيث ان كلا من المعادلات التفاضليـة التالية

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$$

تستوفيها الدوال

$$x_n = x_n(t)$$

عندئذ المعادلة التفاضليـة

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \sum_n F_n(t) \qquad (٣\_٨٤)$$

تستوفيها الدالـة

$$x = \sum_n x_n(t) \qquad (٣\_٨٥)$$

ان صحة النظرية المذكورة اعلاه تتبـع مباشـرة من كـون المعادلـــــة التفاضليـة للحركـة خطيـة •

خصوصا عند ما تكون القوة الدافعـة $F(t)$ توافقيـة ترددها الـزاوى ω فان من الممكن تحليلها بسلسـلة فورير[٨] • ووفقا لهذه النظرية يمكننـا تمثيـل $F(t)$ كمجموعـة من حدود الجيب والجيب تمام ، اوبطريقـة اخرى يمكن ان تكتب كمجموعة اسـية مركبـة ، اى

$$F(t) = \sum_n \dot{F}_n e^{in\omega t} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (٣\_٨٦)$$

وتعطي المعامل من

$$F_n = \frac{\omega}{2\pi} \int F(t) e^{-in\omega t} \, dt \qquad (٣\_٨٧)$$

حيث غايات التكامل هي $t = -\pi/\omega$ الى $t = +\pi/\omega$.

كما في البند السـابق ، تعطي الحركـة الحقيقيـة من مجمـوع جزئين ، اى الحد العابـر الذى سوف نهملـه وحل حالة ــ الاسـتقرار •

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i2\omega t} + \ldots \qquad (٣\_٨٨)$$

---

(٨) انظر في اى كتاب من طرق فورير

الحد الاول A_o ثابت تعتمد قيمته على شكل $F(t)$ • ويساوى صفر لقوة دافعة متناظرة • الحد الثاني يعطي استجابة المتذبذب المدنوع في التردد الاساسي ω • الحد الثالث يمثل الاستجابة للتوافق الثاني 2ω للقوة المسلطة وهلم جرا •

يمكننا استخدام نظرية البند السابق لايجاد السعة A_n بدلالة المعامل F_n لذلك نحصل من المعادلة (٣ـ ٧٤) على

$$A_n = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega^2}} \qquad (٣ـ ٨٩)$$

مما سبق نرى ان حالة الاستقرار النهائية للحركة تكون توافقية ، و التوافق الخاص $n\omega$ الذى يكون الاقرب من تردد الرنين ω_r له اعظم سعة • وبالاخص اذا كان ثابت التضاؤل صغيراً جداً ، و اذا حدث وان تطابق تردد الرنين مع احد توافقيات القوة الدافعة بحيث لاى قيمة لـ n نحصل على

$$\omega_r = n\omega$$

عندئذ ستسيطر السعة A_n في هذا التوافق بصورة كبيرة و عليه فان محصلة الحركة للمتذبذب ربما تقترب كثيراً من الدالة الجيبية حتى لو سلطت قوة دافعة غير جيبية •

تمـــــارين

٣ ـ ١) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • اثرت عليه قوة ثابتة مقدارها F_o لفترة زمنية t_o . ثم ضوعفت هذه القوة فجأة الى $2F_o$ وبقيت ثابتة لهذه القيمة • جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن $2t_o$ • .

٣ ـ ٢) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • سلطت عليه القوة F تزداد تربيعيا مع الزمن $F=ct^2$ جد v و x كدوال للزمن t •

٣ ـ ٣) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون في الزمن $t=o$ سلطت عليه قوة متزايدة خطيا $F=ct$ لفترة زمنية مقدارها t_o بعدئذ تناقصت القوة خطيا مع الزمن وانخفضت الى الصفر في الزمن $t=2t_o$ جد المسافة التي يقطعها الجسيم في هذا الزمن •

٣ ـ ٤) جسيم كتلته m كان مبدأيا في حالة السكون • سلطت عليه قوة ثابتة F_o لزمن t_o ثم ازدادت القوة خطيا مع الزمن فاصبحت $2F_o$ بعد فترة زمنية اضافية مقدارها t_o اثبت ان المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن الكلي $2t_o$ تساوى

$$\left(\frac{13}{6}\right) \frac{F_o t_o^2}{m}$$

٣ ـ ٥) تقذف قالب اعلى سطح مائل بانطلاق ابتدائي مقداره v_o . فاذا كان ميل السطح θ و معامل الاحتكاك الانزلاقي بين السطح والقالب يساوى μ جد الزمن الكلي اللازم للقالب حتى يعود الى نقطة انطلاقه •

٣ ـ ٦) ينزلق قالب على سطح مستوٍ مزيت بدهن ثقيل بحيث يعاني القالب مقاومة لزوجة تتغير مع الجذر التربيعي للانطلاق

$$F(v) = - cv^{1/2}$$

فاذا كان الانطلاق الابتدائي للقالب في الزمن $t=0$ يســـاوى v_0
جـد قيم v و x كدوال للزمن t •

٣ ـ٧) اثبت ان القالب في التمرين (٣ ـ٦) لا يمكنـه السـير ابعد مـن :

$$\frac{2m}{3c}\, v_0^{3/2}$$

٣ ـ٨) حل التمرين (٣ـ٦) للحالة التي تتغير فيها القوة مع الانطـلاق مرفوعـا
للقـوة n اى

$$F(v) = -cv^n$$

بين فيما اذا كانت توجـد او لا توجد غاية للموضع لاية قيمة ل n •

٣ ـ٩) تتغير القوة المسـلطة على جسيم مع المسـافة x وفقا لقانون الاساسـية
Power Law . اى

$$F(x) = -kx^n$$

آ ـ جـد دالة الطاقـة الكامنـة

ب ـ اذا كانت $v = v_0$ في الزمن $t = 0$ و $x=0$ جـد v
كدالـة للمسـافة x •

جـ ـ جـد نقاط رجـوع الحركـة •

٣ ـ١٠) جسـيم كتلتـه m ترك ليسـقط من السـكون مسـافة b من نقطة اصـل
توءثر فيها قوة ثابتـة تجذب الجسـيم وفقا لقانون التربيع العكسـي ••

$$F(x) = -kx^{-2}$$

اثبت ان الزمن اللازم للجسـيم لكي يصل نقطـة الاصل هو

$$\pi \left(\frac{mb^3}{8k} \right)^{1/2}$$

٣ـ١١) جد العلاقة بين مسافة السقوط و انطلاق جسيم ترك يسقط من السكون تحت تأثير مقاومة الهواء التي تتناسب مع

آ ـ السرعة　　　　ب ـ مربع السرعة

٣ـ١٢) اطلقت قذيفة شاقوليا الى الاعلى بانطلاق ابتدائي v_o • اذا فرضنا ان مقاومة الهواء تتناسب مع مربع الانطلاق اثبت ان انطلاق القذيفة عند عودتها وتضرب الارض

$$\frac{v_o v_t}{(v_o^2 + v_t^2)^{1/2}}$$

حيث

$$v_t = \text{انطلاق المنتهي} = \left(\frac{mg}{c}\right)^{1/2}$$

٣ـ١٣) تتغير سرعة جسيم كتلته m مع الازاحة x وفقا للمعادلة

$$v = \frac{b}{x}$$

جد القوة التي توثر على الجسيم كدالة ل x •

٣ ـ١٤) اذا كانت القوة الموثرة على جسيم تساوى حاصل ضرب دالة المسافة في دالة السرعة $F(x,v)= f(x)\ g(v)$ اثبت ان المعادلة التفاضلية للحركة يمكن حلها بالتكامل اذا كانت القوة تساوى حاصل ضرب دالة المسافة في دالة الزمن • هل يمكن حل معادلة الحركة بالتكامل البسيط؟ هل يمكن حلها اذا كانت القوة تساوى حاصل ضرب دالة الزمن في دالة السرعة ؟

٣ ـ١٥) القوة التي توثر على جسيم كتلته m هي

$$F = kvx$$

حيث k ثابت فاذا مر الجسيم في نقطة الاصل بانطلاق v_o في الزمن $t = 0$ جد x كدالة للزمن t •

٣ ـ١٦) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سعتها A و يمر من نقطة الاستقرار بانطلاق v_o ما هو زمن الذبذبة Period ؟

٣ ـ١٧) جسيمان كتلتاهما m_1 , m_2 على التوالي ، يتحرك كل منهما حركة توافقية بسيطة سعة الاولى A_1 والثانية A_2 فاذا كانت الطاقة الكلية للجسيم الاول ضعف طاقة الجسيم الثاني ، جد نسبة زمن ذبذبة الاول الى الثاني • (T_1/T_2)

٣ ـ١٨) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فاذا كان انطلاقه v_1 عندما تكون ازاحته x_1 , v_2 عندما تكون ازاحته x_2 جد مدة الذبذبة والسعة للحركة بدلالة الكميات المذكورة •

٣ ـ١٩) نابضان مرونتهما k_1,k_2 على التوالي علقا بوضع شاقولي لحمل جسم كتلته m برهن على ان التردد الزاوى للتذبذب هو $\left[\frac{(k_1 + k_2)}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$ اذا ربط النابضان على التوازى و $\left[\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)\ m}\right]^{\frac{1}{2}}$ اذا ربطا على التتالي •

٣ ـ ٢٠) نابض مرونته k يحمل صندوقا كتلته M موضوعا فيه قالب كتلته m فاذا سحب الجهاز الى الاسفل من موضع استقراره مسافة d وترك • جد قوة رد الفعل بين القالب و قعر الصندوق كدالة للزمن • ما هي قيمة d التي يبدأ فيها القالب على وشك ان يترك قعر الصندوق عندما يكون في اعلى التذبذب الشاقولي ؟ اهمل مقاومة الهواء •

٣ـ ٢١) يعرف المعدل الزمني للدالة $f(t)$ بالعلاقة التالية :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

اثبت ان المعدل الزمني (لزمن ذبذبة واحدة) للطاقة الحركية

لمتذبذب توافقي غير متضائل يساوى المعدل الزمني للطاقة الكامنة ٠

٣ـ٢٢) اثبت ان النسبة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى لمتذبذب توافقي متضائل تكون ثابتة (لاحظ ان النهايات العظمى لا تحدث في نقاط تماس منحني الازاحة مع المنحني $Ae^{-\gamma t}$).

٣ـ٢٣) اذا علمت ان سعة متذبذب توافقي متضائل تهبط الى $1/e$ من قيمتها الابتدائية بعد مرور n من الاهتزازات الكاملة ٠ اثبت ان نسبة زمن ذبذبته الى زمن ذبذبته بدون تضاؤل هي

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

٣ـ٢٤) اذا كان انطلاق المنتهي لكرة حرة السقوط هو ٤ر٦٦ متر/ ثا ٥ وعند تعليقها وهي في حالة السكون بوتر مرن خفيف يتمطط مسافة ٠ر٦١ متر ٠ فاذا تركت تتذبذب شاقوليا ٠ جد زمن الذبذبة ٠ افرض القانون الخطي لمقاومة الهواء ٠

٣ـ٢٥) في المسألة السابقة ، جد عدد الذبذبات عندما تهبط السعة بمقدار واحد بالمائة من السعة الابتدائية ٠

٣ـ٢٦) جد التردد الطبيعي وتردد الرنين للكرة في التمرين (٣ ـ ٢٤) ٠ جد كذلك معامل النوعية Q للجهاز ٠

٣ـ٢٧) اثبت ان التردد الدافع ω الذى تكون فيه سعة متذبذب توافقي مدفوع تساوى نصف السعة في تردد الرنين هي تقريبا $\omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$.

٣ ـ٢٨) جد التردد الدافع للحالة التي يكون فيها انطلاق متذبذب توافقي اضطرارى اكبر ما يمكن [تلميح ـ خذ النهاية العظمى للكمية

$$v_{max} = \omega A(\omega).]$$

٣ـ٢٩) اثبت ان معامل النوعية Q لمتذبذب توافقي مدنوع يساوى العامل الذى يجب ضبطه في الاستجابة لتردد دافع في الصفر للحصول على الاستجابة في تردد الرنين •

٣ـ٣٠) حل المعادلة التفاضلية لحركة متذبذب توافقي تحت تأثير قوة دافعة توافقية متضائلة من النوع

$$F_{ext} = F_o e^{-bt} \cos(\omega t)$$

٣ ـ٣١) برهن ان متسلسلة فورير " للموجة المربعة " التوافقية Periodic Square Wave هـي

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \tfrac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + .. \right]$$

حيث

$$f(t) = +1 \quad \text{for } 0 < \omega t < \pi \;;\; 2\pi < \omega t < 3\pi$$

و هلم جـرا

$$f(t) = -1 \quad \text{for } \pi < \omega t < 2\pi \;;\; 3\pi < \omega t < 4\pi$$

و هلم جرا

٣ ـ٣٢) استخدم النتيجة السابقة لايجاد حالة الاستقرار لحركة متذبذب توافقي متضائل اى مدنوع بقوة موجه ـ مربعة توافقية سعتها F_o . وبصورة خاصة ، جد السعات النسبية للحدود الثلاث الاولى A_1 ، A_3 ، A_5 لدالة الاستجابة $x(t)$ في الحالة التي يتطابق فيها التوافقي الثالث 3ω للتردد الدافع مع تردد رنين التذبذب • افرض ان معامل النوعية $Q = 100$.

الفصل الرابـــــع

ديناميك الجسيم ـ الحركة بصورة عامـــــــــة

Dynamics of a Particle-General Motion

الان نحول انتباهنا الى الحالة العامة لحركة جسيم في الفضاء • رأينـا قبـــل قليل ان الصيغة الاتجاهية لمعادلة حركة الجسيم هي ـ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

او ما يكافيء ذلك

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (٤ـ١)$$

هذه بالحقيقة تمثل اختصارا للمعادلات التركيبية الثلاث التالية ـ

$$F_y = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) \qquad F_z = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) \qquad F_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

حيث مركبات القوى F_x ، F_y ، F_z قد تتضمن الاحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمـــن والزمن • ان من المؤسف حقا ، ان لاتوجد طريقة عامة لايجاد حلول تحليلية لجميـــــع الحالات الممكنة • ولكن هناك انواع خاصة عديدة لدوال قوى ذات اهمية فيزيائية يمكـــن التصدى لمعادلاتها التفاضلية بطرق بسيطة نسبيا • وسندرس بعضا منها في البنــــود التالية ـ

(٤ـ١) قاعدة الشغل The Work Principle

لنضرب طرفي المعادلة العامة للحركة عدديا بالسرعة $\vec{v}$ • اى

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot\vec{v} \qquad (٤ـ٢)$$

والان من قوانين التفاضل للضرب العددى نعلم ان

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{2\vec{v}\cdot d\vec{v}}{dt}$$

لذلك اذا فرضنا ان الكتلة m ثابتة ، نرى المعادلة المذكورة توا تكافىء

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\, m\vec{v}.\vec{v}\right) = \frac{dT}{dt} \qquad (٤ـ٣)$$

حيث ادخلنا ، $T = \frac{1}{2}mv^2$ ، الطاقة الحركية • ولما كان $\vec{v}dt = d\vec{r}$ فيمكننـــــا التكامل لنحصل على

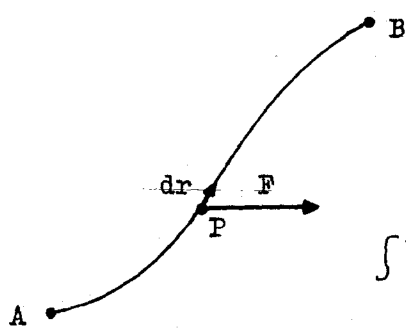
$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \int dT \qquad (٤ـ٤)$$

الطرف الايسر لهذه المعادلة ، هو تكامل خطي وهو يمثل الشغل المنجـــز على الجسيم من تأثير القوة F خلال حركته على طول مسار الحركة• ويمثـل الطـــرف الايمن محصلة التغير في الطاقة الحركية للجسيم• فالمعادلة تنص اذن، علـــى ان الشغل المنجز على جسيم يساوى الزيادة في الطاقة الحركية •

(٤ـ٢) القوى المحافظة ومجالات القوة

Conservative Forces and Force Fields

ان مقدار التكامل الخطي ، الشغل في هذه الحالة ، يعتمد بصورة عامـة على مسار التكامل ، لاحظ الشكل (٤ـ١) • وبعبارة اخرى يعتمد الشغل المنجز اعتياديـا على الطريق الخاص الذى يسلكه الجسيم في ذهابـه من نقطة الى اخرى•



الشكل (٤ـ١)

الشغل الذى تنجزه القوة F هو التكامل الخطي $\int \vec{F}.d\vec{r}$

اى لو طلب منا حساب قيمة تكامل الشغل فسنحتاج قبل كل شيء الى معرفة مسار حركة الجسيم. ومن ناحية اخرى، الانواع الاعتيادية للمسائل التي لها اهمية في ديناميك الجسيم هي التي يكون مسار حركتها مجهولا منذ البداية ، اى ان المسار هو احد الاشياء التي يجب حسابها. عندئذ ، يظهر ان قاعدة الشغل المبينة في المعادلة (٤ـ٤) ربما لاتكون مفيدة جدا لاغراضنا. ولكن ظهر ان قاعدة الشغل مفيدة جدا في دراسة حركة الجسيم تحت تاثير نوع خاص من القوى والتي تعرف بالقوى المحافظة. Conservative Forces ولحسن الحظ هناك عدد كبير من القوى الفيزيائية المهمة هي قوى محافظة.

عندما تكون القوة $\vec{F}$ دالة لاحداثيات الموضع فقط يقال عنها بانها تعرّف مجال قوة استاتيكي Static Force Field. ضمن انواع المجالات الممكنة، يوجد صنف مهم فيه تكامل الشغل $\int \vec{F}.d\vec{r}$ لايعتمد على مسار التكامل. ان مجالات قوى كهذه تكون محافظة رياضيا. المجال المحافظ هو الذى يكون فيه $\vec{F}.d\vec{r}$ تفاضلا دقيقا Exact differential. عندما يتحرك جسيم في مجال محافظ فتكامل الشغل ومن ثم الزيادة في الطاقة الحركية يمكن معرفتها مقدما. وهذه المعلومات يمكن استخدامها للتكهن عن حركة الجسيم.

(٤ـ٣) دالة الطاقة الكامنة — Potential Energy Function

عند استخدام الاحداثيات الديكارتيه ، يمكن التعبير عن تكامل الشغل على النحو التالي:

$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (٤ـ٥)$$

لنفرض ان من الممكن ايجاد مركبات القوة بتفاضل داله عدديه معينة مثل $V(x,y,z)$ بالطريقة التالية

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (٤ـ٦)$$

الدالة V التي عرّفت بهذه الطريقة تسمى بدالة الطاقة الكامنة ، كما في حالة البعد الواحد حيث $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ • اذا تواجدت داله طاقة كامنة، عندئذ يمكننا كتابة

$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \int (-\frac{\partial V}{\partial x}\,dx - \frac{\partial V}{\partial y}\,dy - \frac{\partial V}{\partial z}\,d.) = -\int dV \quad ...... \quad (٤ـ٧)$$

وتصبح قاعدة الشغل ببساطة

$$\int dT = -\int dV \qquad (٤ـ٨)$$

وهذا يدل بوضوح على ان T , $-V$ يختلف في الغالب احدهما عن الآخر بكمية ثابتة • ولنمثل هذا الثابت بالرمز E عندئذ $T-(-V)=E$ او $T+V=E$

ونسمي E الطاقة الكلية ، ونكتبها بصورة واضحة كالآتي ــ

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = E \qquad (٤ـ٩)$$

وهذه تعني ــ عندما يتحرك جسيم في مجال محافظ للقوة فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة •

الطاقة الكامنة لمجال جاذبية منتظم

لنعتبر حركة جسيم في مجال قوة منتظم ، كحركة جسيم تحت تاثير الجاذبية قرب سطح الارض • اذا اخترنا المحور ــ z شاقوليا ، عندئذ مقدار القوة يكون mg وبالاتجاه السالب لمحور ــ z • اذن يجب ان تحقق داله الجهد المعادلات التالية ــ

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (٤ـ١٠)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$$

من الواضح ان الدالة التالية تحقق المعادلات المذكورة اعلاه ٠

$$V(x, y, z) = mgz + C \qquad (٤\_١١)$$

حيث C يمثل ثابت التكامل وهو اعتباطي بكل ماني الكلمة من معنى ٠ وقيمته تعيين بسهولة ، اختيار مستوى المرجع الذى يجب ان تقاس منه الطاقة الكامنة ٠ هـــذه الاعتباطية في اختيار الثابت لدالة الجهد هي خاصية عامة لجميع دوال الجهد ٠ والطاقة الكامنة ليست كمية مطلقة وانما تعرّف دائما بالنسبة الى مرجع اعتباطي ٠ لنختر لهـذه الحالة الثابت C مساويا الى الصفر ٠ وهذا يعني ان الطاقة الكامنة تعرّف بحيث يكون سطح الارض مرجعا للمستوى الصفرى ٠ عندئذ تصبح معادلة الطاقة ــ

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E \qquad (٤\_١٢)$$

وتحسب قيمة الطاقة الكلية E لاية حالة تعطى ، من الشروط الابتدائية للحركـــة ٠

جهـد قانـون التربيـع العكسي لقـوة

في حالة مجال جاذبية الارض ، نعلم ان القوة تتغير عكسيا مع مربع المسافة ، مقاسة من مركـز الارض ٠ وقد وجد كذلك بأن علاقة التربيع العكسي هذه ، هي قانون قـوة المجالات الكهربائية للجسيمات البدائية Elementary particles ٠ وهذه القـوى من الانواع الاساسية التي تحدث في الطبيعة ٠

ويمكن كتابـة قانون التربيع العكسي بصيغتـه التحليليه على النحو التالي

$$\vec{F} = -k\,\frac{\hat{n}}{r^2} \qquad (٤\_١٣)$$

حيث $\hat{n}$ تمثل الوحدة المتجهة باتجاه متجه الموضع r و k يمثل ثابت التناسـب ٠ اما الاشارة السالبة فتعني ان القوة هي تجاذبية او متجهة نحو نقطة الاصـــل (والاشارة الموجبـة ستعني قوة تنافرية اتجاهها متعدا عن نقطة الاصل) والان يمكن تمثيل الوحدة المتجهة $\hat{n}$ بالنسبة بين متجـه الموضع $\vec{r}$ ومقداره r ٠ اى

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

اذ ن يمكن كتابة قانون التربيع العكسي للقوة ايضا على النحو التالي—

$$\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (٤—١٤)$$

فاذا استخدمنا الاحداثيات الديكارتية ، عندئذ $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ و $\vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ وعليه نحصل على —

$$\vec{F} = -k\ (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (٤—١٥)$$

لقانون التربيع العكسي بدلالة الاحداثيات الديكارتيه ٠

سبق وان استبطنا في البند (٣— ٨) مسألة البعد الواحد لقانون التربيع العكسي للقوة ٠ حيث رأينا ان الدالة $V(r) = -\frac{k}{r}$ تعطي القوة الصحيحة ، اى $F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{r^2}$ ٠ وقد ظهر ان نفس الدالة تعطي القوة الصحيحة للحالة ذات الابعاد الثلاثة ٠ لذلك لو اخذنا — $V(x,y,z) = -k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

عندئذ

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ky\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -kz\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

هذه تماما مركبات القوة اللازمة لكي تعطي دالة القوة لمعادلة (٤—١٥) ٠

(٤—٤) شروط تواجد دالة الجهد — موثر دلتا

Conditions for the Existance of a potential Function-The Del Operator.

رأينا في الفصل الثالث ان الحركة في خط مستقيم لجسيم تكون دائما محافظة ، اذا كانت القوة دالة للموضع فقط ٠ بالطبع قد يسأل السائل الان اذا كان هذا يصح للحالة العامة للحركة ذات البعدين والثلاثة ابعاد ام لا ؟ اى اذا كانت القوة المسلطة على جسيم دالة لاحداثيات الموضع فقط فهل تتواجد دالة مثل V

تحقق دائما المعادلة (٤ــ٦) المذكورة اعلاه • والجواب على هذا السؤال هو لا ، ان دالة الجهد تتواجد فقط في الحالة التي تحقق فيها مركبات القوى

$$F_x = F_x(x, y, z)$$
$$F_y = F_y(x, y, z)$$
$$F_z = F_z(x, y, z)$$

معيارا خاصــا •

لنفرض ان دالة الجهد متواجدة ، اى ، ان المعادلات (٤ــ ٦) تصح • عندئذ ، اذا فاضلنا F_x جزئيا بالنسبة للمحور y و F_y جزئيا بالنسبة للمحور x فاننــا نحصل على

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

ولكن $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ لان ترتيب المفاضلة غير مهم (على فرض ان الدالــة V مستمرة وكذلك مشتقتها الاولى والثانية) • وبالتماثل يمكن الحصول من الزوجيـــن (F_x, F_z) و (F_y, F_z) على مايلي ــ

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad (٤ــ١٦)$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

هذه هي الشروط الضرورية عندئذ لـ F_x ، F_y ، F_z لكي تتواجد دالة للجهــد وهي تعبر عن الشرط الذى يكون فيــه ــ $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ دقيق التفاضل Exact Differential (١) كذلك يمكننا ان نثبت بانها شروط كافية اى اذا صحت المعادلات (٤ــ١٦) ، فان مركبات القوة هي فعلا مشتقة مــن دالــة الجهد $V(x, y, z)$ ، ويكون مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة ثابتاً •

---

(١) انظر في كتاب متقدم في التفاضل مثل

A.E. Taylor, Advanced Calculus, Ginn, Boston, 1955.

المـــوثـــر "دلتــا" The Del Operator

اذا كان مجال القوة محافظا بحيث اعطيت المركبات بالمشتقات الجزئيــة لدالــــة الطاقة الكامنة ، عندئذ يمكننا تمثيل $\vec{F}$ بجبر المتجهات على النحو التالــــي

$$\vec{F} = -\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (٤\text{—}١٧)$$

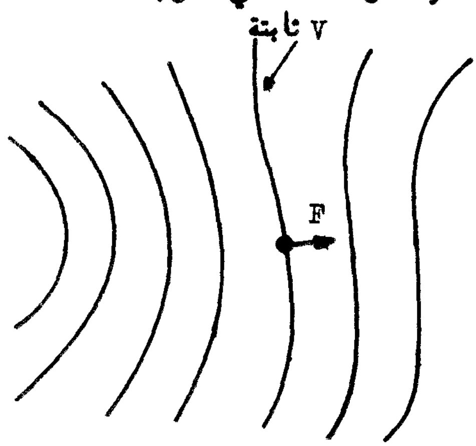
ويمكننا كتابة هذه المعادلة بطريقة ملائمة ومختصرة كالاتي

$$\vec{F} = -\nabla V \qquad (٤\text{—}١٨)$$

هنا ادخلنا الموثر لمفاضلة المتجــه وهو

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ويسمى بموثر دلتا Del Operator ويسمى التمثيل ∇V بمنحـــــدر V " gradient V " ويكتب بعض الاحيان على النحو grad V . اما مــن الناحية الرياضية ، فمنحدر الدالة كمية متجهة تمثل التفاضل الفراغــي Spatial للدالة في المقدار والاتجاه. من الناحية الفيزيائية ، فان المنحدر السالب لدالــة الطاقة الكامنة يعطي اتجاه ومقدار القوة التي توثر على جسيم موضوع في مجال كونتـــه جسيمات اخرى ، وتعني الاشارة السالبة ان الجسيم اجبر على الحركة باتجاه تناقص الطاقة الكامنة بدلا من الاتجاه المعاكس . الشكل (٤ـ٢) يمثل توضيحا للمنحـــدر . حيث رسمت دالة الجهد على شكل خطوط مناسيب Contour Lines وكل منهـــا تمثل منحني لطاقة كامنة ثابتة . والقوة في اية نقطة تكون دائما عمودية على المنحنـــي المتساوي الجهد او السطح المار خلال النقطة التي نحن بصددها .



الشكل (٤ـ ٢)
قوة المجال ممثلة بخطوط
مناسيب الطاقة الكامنـــة

يستخدم موءثر دلتا كمعيار ملائم لمعرفة ما اذا كانت قوة المجال محافظة ام لا • نستخدم لهذا التطبيق الضرب الاتجاهي لموءثر دلتا اى

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad (٤ــ٢٠)$$

ان الضرب الاتجاهي كما عرّف اعلاه يسمى بدوران ـ F ، "(Curl F)" • ونـرى وفقا للمعادلات (٤ــ١٠) ان كلامن مركبات i, j, k في دوران ــ F يتلاشى اذا كانت القوة F محافظة• وهكذا يمكن كتابة الشرط اللازم بشكله المحكم التالـــي لكي تكون القوة محافظة •

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \qquad (٤ــ٢١)$$

رياضيا ، تمثل المعادلة المذكورة اعلاه الشرط الضرورى والكافي لكي يكون الحــــد $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ تفاضلي دقيق او بعبارة اخرى لايعتمد التكامل $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ علـــى مساره • اما من الناحية الفيزيائية ، فيعني تلاشي دوران ــ F ، ان الشغل الذى تقـوم بـه القوة F لتحريك جسيم لا يعتمد على مسار الجسيم في ذهابــه من نقطة معينة الى اخرى•

هناك علاقة جبرية ثالثة تحتوى على موءثر دلتا ، نعني الضرب العددى $\nabla\cdot\vec{F}$ • وهذا يسمى بمتفرقةــ $\vec{F}$ (divergence of F) • ففي حالة قوة المجال تمثل المتفرقة مقياس كثافة المجال في نقطة معينة • وللمتفرقة اهمية خاصة في نظريــــــة الكهربائية والمغناطيسية •

امثلـة

١ــ جد قوة المجال لدالة الجهد $V = x^2 + yx + xz$ عند استخدام موءثـــر دلتا نحصل على

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{i}\,(2x+y+z) - \hat{j}x - \hat{k}x$$

٢ــ هل قوة المجال $\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}yz$ محافظة ؟

باخذ دوران ــ $\vec{F}$ نحصل على

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \hat{i}(z-x)+\hat{j}0+\hat{k}(z-x)$$

ولما كانت النتيجة لاتساوى صفرا فالمجال اذن غير محافظ

٣ـ ما قيم الثوابت c, b, a التي تكون فيها القوة $\vec{F}=\hat{i}(ax+by^2) + \hat{j}cxy$ محافظة •

باخذ دوران ـ F نحصل على

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax+by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(c - 2b)\ y$$

تبين هذه النتيجة ان القوة محافظة • شريطة ان يكون $c=2b$. قيمـــة a لا اهمية لها •

(٤ـ٥) القوى من النوع القابل للفرز• Forces of the Separable Type

في حالات كثيرة يمكن اختيار محاور بحيث تكون مركبات قوة المجـــال دوال لاحداثياتها فقط اى ـ

$$\vec{F} = \hat{i}F_x(x) + \hat{j}F_y(y) + \hat{k}F_z(z) \qquad (٤ـ٢٢)$$

هذا النوع من القوى تسمى قابلة الفرز **Separable** سبق وان برهنا بسهولـة ان دوران قوة كهذه يساوى صفرا ولهذا السبب يكون مجالها محافظا بصرف النظـر عـن الاشكال الخاصة لمركبات القوة مادامت كل منها دالة فقط ـ للاحداثي المســتخدم• عندئذ يكون تكامل المعادلات التفاضلية للحركة بسيطا جداً • لان معادلة كل مركبـة تكون من نوع $m\ddot{x}=F(x)$. في هذه الحالة يمكن حل المعادلات بالطرق التي وصفت في الفصـل السـابق تحـت عنـوان الحركـة فـي خـط مســـــتقيم •

سنبحث في البنود القادمة بعض امثلة القوى قابلة الفرز المحافظة منها وغير المحافظة •

(٤ـ٦) حركة القذيفة في مجال تثاقلي منتظم

Motion of a Projectile in a Uniform Gravitational Field

تعتبر حركة القذيفة من المسائل التقليدية المشهورة في ديناميك الجسيم • سوف ندرس هذه المسألة بالتفصيل لانها توضح القواعد العامة التي اوردناها في البنود السابقة •

اهمال مقاومة الهواء

للسهولة ، لنفرض اولا الحالة التي تتحرك فيها القذيفة عندما تهمل مقاومة الهواء في هذه الحالة المثالية توجد قوة موثرة واحدة فقط ، هي قوة جذب الارض • وعند اختيار محور ـ z شاقوليا تكون المعادلة التفاضلية للحركة على النحو التالي ـ

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k}$$

علاوة على ذلك لجعل المسألة اكثر مثاليةً نفرض ان التعجيل الارضي ثابت • من الواضح عندئذ أن دالة القوة تكون من النوع القابل الفرز والمحافظ ايضا لانها تمثل حالة خاصة من معادلة (٤ـ٢٢) • سبق وان استنبطت معادلة الطاقة في البند (٤ـ٣) سوف نعمد الى تخصيص المسألة اكثر وذلك باختيار الانطلاق الابتدائي مساويا الى v_0 والموضع الابتدائي في نقطة الاصل عندما يكون الزمن $t = 0$ • عندئذ معادلة الطاقة

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

او

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

تعطي الانطلاق كدالة للارتفاع • هذه جميع المعلومات التي يمكننا الحصول عليها مباشرة من معادلة الطاقة •

لكي نتابع الموضوع اكثر ، يجب ان نعود الى المعادلة التفاضلية للحركة• التي يمكن كتابتها على النحو التالي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -g\hat{k}$$

وهذه من نفس صيغة تلك التي بحثت في البند (٢ـ١٠) • ويمكن تكاملها مباشرة • فبتكاملها مرة واحدة نحصل على السرعة ، اى

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -gt\hat{k} + \vec{v}_0$$

حيث ثابت التكامل v_0 يمثل السرعة الابتدائية • وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على موضع المتجه ،اى

$$r = \frac{-1}{2}gt^2\hat{k} + v_0 t$$

في هذه الحالة يساوى ثابت التكامل r_0 صفرا ، لان الموضع الابتدائي للقذيفة اخذ في نقطة الاصل • وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات على النحو التالي ـ

$$\begin{aligned} x &= \dot{x}_0 t \\ y &= \dot{y}_0 t \\ z &= \dot{z}_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \qquad (٤ـ٢٣)$$

هنا $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ تمثل مركبات السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ • قمنا اذن بحل مسألة حساب موضع القذيفة كدالة للزمن •

اما بالنسبة لمسار القذيفة ، نلاحظ عند حذف t من معادلتي x و y ان النتيجة تكون $y = bx$

حيث b ثابت ويساوى $b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$

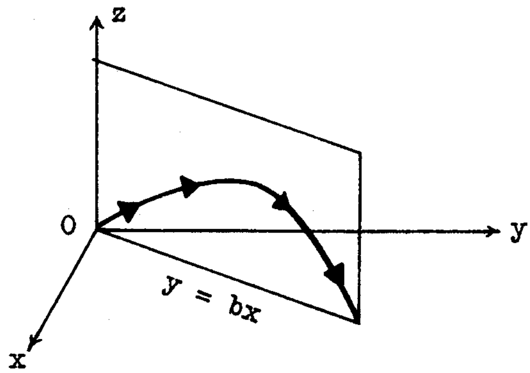
لذلك يقع المسار كليا في مستوى وبصورة خاصة ، اذا كان $\dot{y}_0 = 0$ ، عندئذ يقع المسار في المستوى ـ xz • بعد ذلك ، اذا حذفنا t من معادلتي x, z تكون معادلة المسار على الشكل التالي ـ

$$z = \alpha x - \beta x^2$$

حيث

$$\alpha = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}, \qquad \beta = \frac{g}{2\dot{x}_0^2}$$

اذن المسار قطع مكافيء يقع في المستوى $y=bx$. كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ٣) •



الشكل (٤ـ٣) مسار قذيفة متحركة
في ثلاثة ابعاد

مقاومة الهواء الخطية

لنفرض الان حركة القذيفة في الحالة الاكثر واقعية والتي تكون فيها القـوة المعوقـة ناشئة عن مقاومة الهواء . في هذه الحالة تكون الحركة غير محافظة . وتتناقص الطاقـة الكلية بصورة مستمرة كنتيجة للخسران بسبب الاحتكاك .

وللسهولة ، نفرض ان قانون مقاومة الاحتكاك خطي بحيث تتغير قوة المقاومة طردياً مع السرعة $\vec{v}$. سيكون من الملائم كتابة ثابت التناسب على الشكل γm حيث m تمثل كتلة القذيفة . فهناك اذن قوتان تؤثران على القذيفة ، هما مقاومة الهـواء $-m\gamma\vec{v}$ والقوة التثاقلية والتي كما في السابق تساوي $-mg\hat{k}$ ، عندئذ المعادلة التفاضلية تصبح

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\gamma\vec{v} - mg\hat{k}$$

وباختصار m من كل حد ، نحصل على

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma\vec{v} - g\hat{k}$$

ويتم تكامل المعادلة المذكورة اعلاه بسهولة عند كتابتها بدلالة مركباتها .

اى

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x}$$
$$\ddot{y} = -\gamma \dot{y}$$
$$\ddot{z} = -\gamma \dot{z} - g$$

نلاحظ ان هذه المعادلات قد فرزت الآن • اذن يمكن حل كل منها بصورة منفـردة باساليب الفصل السابق • وباستخدام نتائجنا من البند (٣ـ٧) نستطيع كتابة الحلول مباشرة والتي

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t}$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \qquad (٤ـ٢٤)$$
$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

لاحداثيات السرعة و

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$
$$y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \qquad (٤ـ٢٥)$$
$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$$

لاحداثيات الموضع • هنا كالسابق • مركبات السرعة الابتدائية هـــــــي

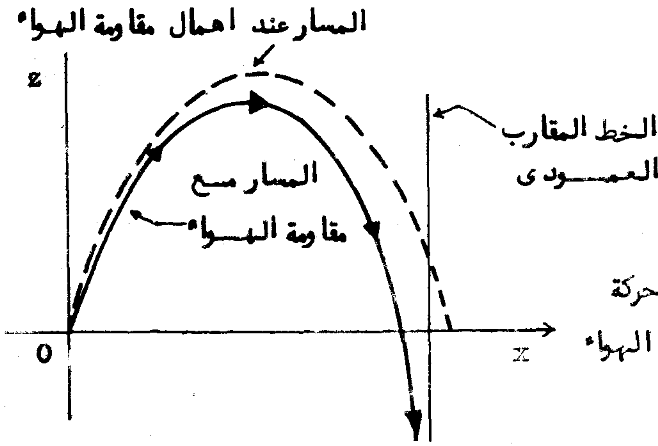
$\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ وقد اخذ موضع القذيفة الابتدائي في نقطة الاصـــــل •

كالحالة التي اهملت فيها مقاومة الهواء • تبقى الحركة كليا في المســـتوى $y = bx$ حيث $b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$ • والمسار في هذا المستوى ليس قطعـا مكافئـــا • وانما منحن يقع اسفل المسار المكافيء • كما هو مبين في الشكل (٤ـ٤) •

ان فحص معادلتي x و y يرينا ان x و y يقتربان من الغاية عندما تكون t كبيرة اى

$$x \longrightarrow \frac{\dot{x}_0}{\gamma}$$
$$y \longrightarrow \frac{\dot{y}_0}{\gamma}$$

وهــذا يعنــي ان للمســار الكامل خط مقارب عمودى كما هو مبيــن في الشـــكل •



الشكل (٤ـ٤)
مقارنة بين مسارى القذيفة المتحركة عند اهمال وعدم اهمال مقاومة الهواء

تمثل المعادلة (٤ـ٢٥) الحل النهائي لحركة القذيفة عندما تعتبر مقاومة الهواء خطية ، والتي يمكن كتابتها بجبر المتجهات بالطريقة التالية

$$\vec{r} = \left(\frac{\vec{v}_0}{\gamma} + \frac{\hat{k}g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \hat{k}\frac{gt}{\gamma} \qquad (٤ـ٢٦)$$

اى ان حل المعادلة التفاضلية الاتجاهية للحركة يمكن تحقيقه بالتفاضل بسهولة .

من المهم اعتبار الحالة التي تكون فيها مقاومة الهواء صغيرة جدا ، اى عندما يكون مقدار الكمية γt في الدالة الاسية اصغر بكثير من واحد . ولهذا الغرض سوف تستخدم المتسلسلة الاسية التالية

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\cdots$$

والتي عندما نعوض فيها $u = -\gamma t$. تصبح النتيجة ، بعد الاختصار وتجميع الحدود كما يلي

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \hat{k} - \Delta\vec{r} \qquad (٤ـ٢٧)$$

حيث

$$\Delta\vec{r} = \gamma\left[\vec{v}_0\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{\gamma t^3}{3!} + \cdots\right) + \hat{k}g\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{\gamma t^4}{4!} + \cdots\right)\right] \qquad (٤ـ٢٨)$$

يمكن اعتبار الكمية $\Delta\vec{r}$ كتصحيح لمسار القذيفة الذى اهملت فيه المقاومة ليعطي المسار الحقيقي .

في الحركة الفعلية للقذيفة خلال الجو ، لايكون قانون المقاومة خطيا ، ولكنه دالة معقدة جدا للسرعة .ويمكن حساب المسار بصورة دقيقة بطريقة التكامل العددى وبمساعدة الحاسبات عالية الانطلاق .

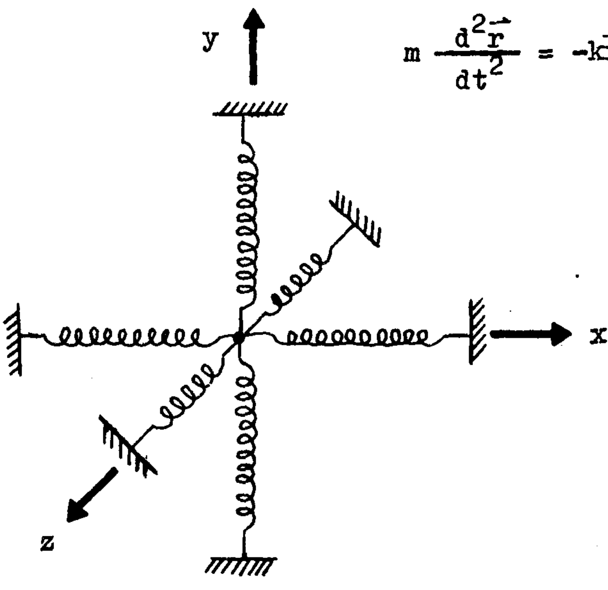
(٤ـ٧) المتذبذب التوافقي في البعدين والثلاثة ابعاد .
The Harmonic Oscillator in two and three Dimensions

سنفترض في هذا البند حركة جسيم تؤثر عليه قوة معيدة خطية تتجه دائما نحو نقطة ثابتة ، نقطة الاصل في نظام احداثياتنا . قوة كهذه يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة بسهولة على النحو التالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \qquad (٤ـ٢٩)$$



الشكل (٤ـ٥)
موديل لمتذبذب توافقي ذو ابعاد ثلاث

ويمكن تمثيل هذه الحالة ، على وجه التقريب ، بجسيم مربوط بمجموعة من النوابض المرنة ، كما هو مبين في الشكل (٤ـ٥)

المتذبذب ذو البعدين

لحالة الحركة في سطح مستو ، المعادلة التفاضلية المذكورة اعلاه تكافىء المعادلتين المفروزتين التاليتين

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

وكل من هاتين المعادلتين تماثل معادلة المتذبذب التوافقي في خط مستقيم والذى درسناه في البند (٢ـ١٢ أ) . لذلك يمكننا كتابة الحلول مباشرة على النحو التالي

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B \cos(\omega t + \beta) \qquad (٤ـ٣٠)$$

حيث

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وتحسب ثوابت التكامل A ، B ، α ، β لاية حالة معينة من الشروط الابتدائية .

لايجاد معادلة المسار ، نحذف الزمن t من المعادلتين . ويكون ذلك بكتابة المعادلة الثانية على النحو التالي

$$y = B \cos(\omega t + \alpha + \Delta)$$

حيث

$$\Delta = \beta - \alpha$$

عندئذ

$$y = B\left[\cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t + \alpha)\sin\Delta\right]$$

ونحصل من اولى معادلتي (٤ـ٣٠) على

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\Delta$$

وبنقل الحدود وتربيع طرفي المعادلتين الاخريين نحصل على

$$\frac{x^2}{A^2} - xy\,\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \qquad (٤\_٢١)$$

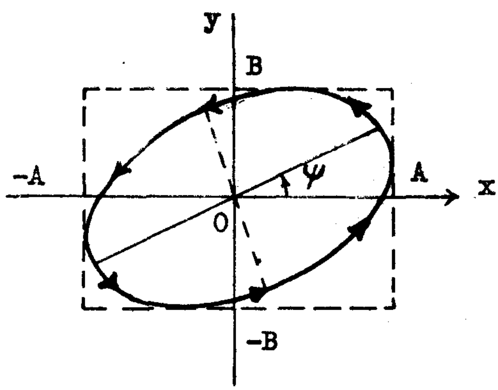
هذه المعادلة من الدرجة الثانية في x و y . والان ، المعادلة العامة من الدرجة الثانية

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

تمثل قطعاً ناقصاً ، قطعاً مكافئاً اوقطعاً زائداً . ويعتمد ذلك على كون المميز

$$b^2 - 4ac$$

سالبا ، صفرا ، او موجبا على التتالي . في الحالة التي نحن بصددها المميز يساوي $\left(\frac{2\sin\Delta}{AB}\right)^2$ ـ اى انه كمية سالبة ، لذلك يكون المسار قطعا ناقصا كما هو مبين في الشكل (٤ــ٦)



الشكل (٤ ــ ٦)

مسار قطع ناقص لحركة متذبذب توافقي في بعدين

في الحالة الخاصة ، عندما يكون فرق الطور Δ يساوى $\pi/2$ ، عندئذ تختصر معادلة المسار الى المعادلة التالية

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص محاوره منطبقة على محاور الاحداثيات · اما اذا كان فرق الطور صفرا او π فمعادلة المسار تصبح خطاً مستقيماً ، اى

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$

وتؤخذ بنظر الاعتبار الاشارة الموجبة عندما تكون $\Delta = 0$ ، والسالبة عندما تكون $\Delta = \pi$ · يمكننا البرهنة للحالة العامة ، ان محاور مسار القطع الناقص تميل بزاوية ψ مع المحور ـ x حيث

$$\tan 2\psi = \frac{2AB \cos\Delta}{A^2 - B^2} \qquad (٤ \_ ٣٢)$$

وقد ترك استنباط هذه العلاقة كتمرين للطالب ·

المتذبذب التوافقي ذو الابعاد الثلاثة

في حالة الحركة في ثلاثة ابعاد ، المعادلة التفاضلية للحركة تكافيء المعادلات المفروزة الثلاث التالية

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{y} = -ky$$
$$m\ddot{z} = -kz \qquad (٤ \_ ٣٣)$$

فحلولها تكون اذن

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$
$$y = B \cos(\omega t + \beta) \qquad (٤ \_ ٣٤)$$
$$z = C \cos(\omega t + \gamma)$$

او ، قد تكتب بطريقة اخرى هي

$$
\begin{aligned}
x &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \\
y &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \\
z &= A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t
\end{aligned}
\qquad (٤ـ٣٥)
$$

وتحسب ثوابت التكامل الستة في كل من المجموعتين من موضع وسرعة الجسيم الابتدائيتين • الان افرض المعادلة الاولى والثانية من مجموعة المعادلات (٤ـ٣٥) • منهما نستطيع ان نجد $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ بدلالة x و y والثوابت A_1، B_1، A_2، B_2

وعند تعويض النواتج في المعادلة الثالثة نحصل على معادلة من النوع $z = ax + by$

حيث الثوابت a, b تحسب من مجموعة ثوابت $A's$ وثوابت $B's$ مسار الحركة يقع اذن في مستو يمر من نقطة الاصل • المسار في هذه الحالة يكون قطعا ناقصا ايضا " (كما هي الحالة في الحركة ذات البعدين) • يمكن رؤية ذلك من المناقشة التالية • اذا حولنا معادلات الحركة الى محاور جديدة مثل x'، y'، z'

والتي لها نفس نقطة اصل المحاور القديمة ودورت بحيث انطبق المستوى $x'y'$ على مستوى الحركة • عندئذ سوف لايتغير شكل المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة

الاحداثيات الجديدة اى

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}' &= -kx' \\
m\ddot{y}' &= -ky'
\end{aligned}
$$

مع

$$z' = 0$$

اذن ، للمسار نفس شكل مسار الحركة ذات البعدين ، اى قطع ناقص في المستوى $x'y'$ • بطبيعة الحال ، يعتمد دوران مستوى الحركة على السرعة الابتدائية والموضع الابتدائي للجسيم •

تمثل المعادلات (٤ـ٣٣) وحلولها ، حركة مايسمى بالمتذبذب المتجانس

isotropic oscillator ذى الابعاد الثلاثة ، وفيه لاتعتمد القوة المعيدة على اتجاه الازاحة . اما اذا اعتمدت القوة المعيدة على اتجاه الازاحة ، فنحصل على حالة التذبذب غير المتجانس . يمكن كتابة المعادلات التفاضلية لحالة التذبذب غير المتجانس وذلك باختيار محاور ملائمة على النحو التالى

$$m\ddot{x} = -k_1 x$$
$$m\ddot{y} = -k_2 y \qquad (٤ - ٣٦)$$
$$m\ddot{z} = -k_3 z$$

هنا عندنا حالة ثلاثة ترددات مختلفة للتذبذب هي $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ ، $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$، $\omega_3 = \sqrt{k_3/m}$ وتعطي الحركة بالحلول التالية

$$x = A \cos(\omega_1 t + \alpha)$$
$$y = B \cos(\omega_2 t + \beta) \qquad (٤ - ٣٧)$$
$$z = C \cos(\omega_3 t + \gamma)$$

مرة اخرى ، تحسب ثوابت التكامل الستة في المعادلات المذكورة اعلاه من الشروط الابتدائية . ويقع التذبذب الناتج للجسيم كليا في صندوق متوازى المستطيلات (اضلاعه $2A$ ، $2B$ ، $2C$) ومركزه في نقطة الاصل . في الحالة التي تتناسب فيها (ω_1 ، ω_2 ، ω_3) أى

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} \qquad (٤ - ٣٨)$$

حيث n_1, n_2, n_3 تمثل اعداداً صحيحة ، سيكون المسار مغلقا لان الجسيم بعد مرور زمن مقداره $\frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2} = \frac{2\pi n_3}{\omega_3}$

يعود الى موضعه الابتدائي وتعاد الحركة مرة اخرى . (افترض في المعادلة (٤ - ٣٨) ان اى عامل مشترك قد اختصر) . وبالعكس ، يكون المسار مفتوحا

اذا كانت ω_1 وω_2 و ω_3 غير متناسبة • وفي هذه الحالة يمكن ان يقال ان المسار يملأ متوازي المستطيلات المذكور اعلاه تماماً ، وبمعنى اخر اذا انتظرنا ـعلى الاقل ـ زمنا كافيا ، فالجسيم سيعود مقتربا بصورة اعتباطية الى اية نقطة معينة •

في حالات عديدة تكون ازاحة محصلة القوة المعيدة المسلطة على ذرة معينة في مادة بلورية صلدة تقريبا خطية • وتقع محصلة ترددات التذبذب اعتياديا في منطقة طيف تحت الحمراء : 10^{12} الى 10^{14} ذبذبة في الثانية •

(٤ ـ ٨) • حركة الجسيمات المشحونة في المجالات الكهربائية والمغناطيسية

Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields

عندما يكون جسيم مشحون كهربائيا بجوار شحنات كهربائية اخرى ، تؤثر عليه قوة هذه القوة $\vec{F}$ تنشأ من المجال الكهربائي $\vec{E}$ للشحنات المجاورة وتكتب

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (٤ ـ ٣٩)$$

حيث q تمثل الشحنة الكهربائية التي يحملها الجسيم في السؤال (٢).

وعليه تكون معادلة حركة الجسيم على النحو التالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} \qquad (٤ ـ ٤٠)$$

اوبدلالة المركبات

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\,E_x \\ m\ddot{y} &= q\,E_y \qquad (٤ ـ ٤١) \\ m\ddot{z} &= q\,E_z \end{aligned}$$

---

(٢) تقاس F بالنيوتن و q بالكولوم و E بالفولت لكل متر في وحدات M K S وتقاس F بالداينات و q بوحدات الالكتروستاتيك و E بالستاتفولت لكل سنتمتر في وحدات CGS .

وبصورة عامة ، تكون مركبات المجال دوال لاحداثيات الموضع x, y, z .

وفي حالة المجالات المتغيرة مع الزمن (اى ، اذا كانت الشحنات التي تولـــد $\vec{E}$ متحركة) فالمركبات تكون ، طبعا ، دوال للزمن t ايضاً .

لنفرض حالة بسيطة ، اى ، تلك التي يكون فيها المجال الكهربائي منتظمـــاً . فباختيار احد المحاور ، كالمحور ـ z ، باتجاه المجال . عندئذ $E_x = E_y = 0$ و $E_z = E$. ومعادلات الحركة ، اى معادلات (٤ ـ ٤١) ، لجسيم شحنتــه q يتحرك في هذا المجال اذن تكون

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{constant}$$

وهذه هي تماماً نفس معادلات حركة القذيفة في مجال جاذبية الارض المنتظـــم . اذن المسار يكون قطعاً مكافئاً .

برهن في الكتب المدرسية للنظرية الكهرومغناطيسية (٣) ان

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

اذا كانت $\vec{E}$ ناشئة من شحنات ساكنة . وهذا يعني ان الحركة في مثـل هـــذا المجال تكون محافظة ، اى تتواجد دالة جهد ϕ بحيث تكون $\vec{E} = -\nabla\phi$. والطاقة الكامنة لجسيم شحنته q في مجال كهذا تساوى عندئذ $q\phi$ والطاقـــة الكلية تكون ثابتة وتساوى $q\phi + \frac{1}{2}mv^2$.

عند تواجد مجال مغناطيسي ساكن $\vec{B}$ (يسمى الحث المغناطيســـي)

---

(٣) مثلا J. C. Slater and N. H. Frank, Electromagnetism, McGraw-Hill, New York, 1947.

تمثل القوة المؤثرة على جسيم متحرك بدلالة الضرب الاتجاهي بصورة ملائمة ، على النحو التالي

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (٢ \_ ٤٢)$$

حيث $\vec{v}$ تمثل السرعة و q الشحنة [٤] . والمعادلة التفاضلية للحركة لجسيم يتحرك في مجال مغناطيسي نقي هي

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (٤ \_ ٤٣)$$

تبين المعادلة المذكورة اعلاه ان تعجيل الجسيم يكون دائما عموديا على اتجاه الحركة . وهذا يعني ان مركبة التعجيل المماسة ($\dot{v}$) تساوى صفرا ، ولذلك يتحرك الجسيم بانطلاق ثابت . ويصح ذلك حتى لو كانت $\vec{B}$ دالة متغيرة للموضع $\vec{r}$ شريطة ان لايتغير مع الزمن .

---

(٤) تصح المعادلة (٤ _ ٤٢) لوحدات mks حيث تقاس F بالنيوتن ، q بالكولوم ، v متر/ ثانية ، و B الوبر/ متر مربع ، اما بوحدات cgs فيجب ان نكتب ($\vec{F} = (q/c)(\vec{v} \times \vec{B})$) حيث $\vec{F}$ تقاس بالداينات و q بالوحدات الالكتروستاتيكيه و c سرعة الضوء وتساوى ٣×١٠^{١٠} سم / ثانية و $\vec{B}$ بالكاوس (لاحظ خط الهامش (٣))

مثـــــــال

لنختبر حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي منتظم ثابت ، لنختار محور — z
باتجاه المجال ، اى ، اننا سنكتب $\vec{B} = \hat{k}B$

والمعادلة التفاضلية للحركة تكون على النحوالتالي

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \hat{k}B) = qB \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = qB(\hat{i}\dot{y} - \hat{j}\dot{x})$$

وبمساواة المركبات ، نحصل على

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \qquad (٤ــ٤٤)$$

$$\ddot{z} = 0$$

نصادف هنا ، ولاول مرة ، مجموعة من المعادلات التفاضلية للحركة ليست من النـــــوع القابلة للفرز ، ولكن حلها بسيط نسبيا لان بامكاننا تكاملها مباشرة بالنسبة للزمن t لنحصل على

$$m\dot{x} = qBy + c_1$$

$$m\dot{y} = -qBx + c_2$$

$$\dot{z} = \text{constant} = \dot{z}_0$$

او

$$\dot{x} = \omega y + C_1$$

$$\dot{y} = -\omega x + C_2 \qquad (٤ــ٤٥)$$

$$\dot{z} = \dot{z}_0$$

حيث استخدمنا الاختصار ، $\omega = \frac{qB}{m}$. وتمثل c's ثوابت التكامـــــل

و $c_1 = \frac{c_1}{m}$ ، $c_2 = \frac{c_2}{m}$ • وعند تعويض $\dot{y}$ من المعادلة الثانية لمجموعة المعادلات (٤ ــ ٤٥) في المعادلة الاولى من مجموعة المعادلات(٤ ــ٤٤) نحصل على المعادلة المفروزة لـ x التالية

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \qquad (٤ ــ ٤٦)$$

حيث $a = \frac{c_2}{\omega}$ • وواضح ان حل هذه المعادلة هو

$$x = a + A \cos (\omega t + \theta_o) \qquad (٤ ــ ٤٧)$$

حيث A ، θ_o يمثلان ثابتي التكامل • والان ، اذا فاضلنا بالنسبة للزمن t نحصل على

$$\dot{x} = -A \omega \sin (\omega t + \theta_o) \qquad (٤ ــ ٤٨)$$

وعند تعويض $\dot{x}$ من المعادلة المذكورة اعلاه في الطرف الايسر من اولى معادلات (٤ــ٤٥) وحل المعادلة الناتجة للمتغير y • النتيجة تكون

$$y = b - A \sin (\omega t + \theta_o) \qquad (٤ ــ ٤٩)$$

حيث $b = -c_1/\omega$ • ولايجاد شكل مسار الحركة ، نحذف t بين المعادلتين (٤ ــ ٤٧) و (٤ ــ ٤٩) فنحصل على

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = A^2 \qquad (٤ ــ ٥٠)$$

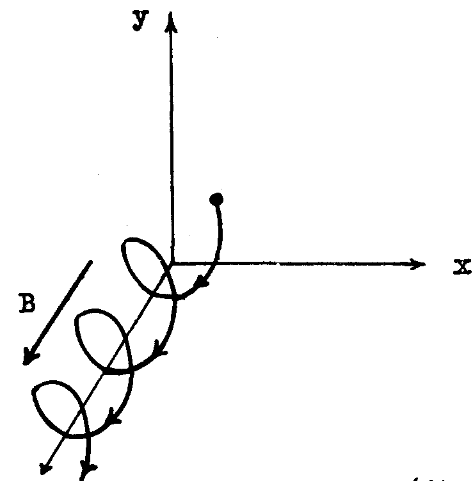
اى ان مسقط مسار الحركة على المستوى -xy هو دائرة نصف قطرها A ومركزها في النقطة(b و a) • لما كان الانطلاق من المعادلة الثالثة لمجموعة المعادلات (٤ــ٤٥) ثابتا باتجاه z نستنتج ان مسار الحركة حلزوني الشكل • ويكون محور المسار الحلزوني باتجاه المجال المغناطيسي كما هو مبين في الشكل (٤ــ٧) •

ونحصل من المعادلة (٤ ــ ٤٨) على

$$\dot{y} = -A\,\omega \cos(\omega t + \theta) \qquad (٤ ــ ٥١)$$

عند حذف t بين المعادلة (٤ ــ ٤٨) والمعادلة (٤ ــ ٥١) نجد ان

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2\,\omega^2 = A^2 \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \qquad (٤ ــ ٥٢)$$



الشكل (٤ ــ ٧)

المسار الحلزوني لجسيم مشحون يتحرك في مجال مغناطيسي

وبتعويض $v_1 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ، نرى ان نصف قطر الحلزون A يكـــون كالاتي

$$A = \frac{v_1}{\omega} = v_1 \frac{m}{qB} \qquad (٤ ــ ٥٣)$$

اذا كانت لاتوجد مركبة للسرعة باتجاه z ، فالمسار يكون دائرة نصف قطرهـــا A. وواضح ان A يتناسب طرديا مع الانطلاق v_1 ،والتردد الزاوى ω للحركـــة في المسار الدائرى لايعتمد على الانطلاق. وتسمى ω بتردد السايكترون ، وقد اخترع ارنس لورنس Ernest Lawrence السايكترون ، الذى يعتمد بعملـه على حقيقـــة

كون ω لاتعتمد على انطلاق الجسيم المشحون •

(٤ـ٩) حركة الجسيم المقيدة Constrained Motion of a Particle

عندما يكون الجسيم المتحرك مقيدا هندسيا بالمفهوم الذى يجب ان يبقى فيه على منحني او سطح معين محدود • فيقال عندئذ عن الحركة بانها مقيدة• من امثلة الحركة المقيدة قطعة الجليد المنزلق حول وداخل اناء نصف كروى او الخرزة المنزلقة على سلك • والتقيد قد يكون كاملا كما في مثال الخرزة او قد يكون من جانب واحد كالمثال الاول• والمقيدات قد تكون ثابتة او متحركة • وفي هذا الفصل سندرس المقيدات الثابتة فقط •

(٤ـ١٠) معادلة الطاقة للمقيدات الملساء

The Energy Equation for Smooth Constraints

القوة الكلية الموثرة على جسيم مقيد الحركة تساوى المجموع الاتجاهي للقوة الخارجية $\vec{F}$ وقوة التقيد $\vec{R}$ • القوة الاخيرة هي رد فعل المقيد على الجسيم• اذن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي •

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \qquad (٤ـ٥٤)$$

اذا ضربنا طرفي المعادلة عدديا بالسرعة $\vec{v}$ نحصل على

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot\vec{v} \qquad (٤ـ٥٥)$$

في حالة التقيد الاملس ـ مثل السطح عديم الاحتكاك ـ يكون رد الفعل $\vec{R}$ عموديا على السطح او المنحني بينما تكون السرعة $\vec{v}$ مماسة له • لذلك يتلاشى الضرب العددى $\vec{R}\cdot\vec{v}$ لان $\vec{R}$ يكون عموديا على $\vec{v}$ • والمعادلة (٤ ـ ٥٥) تصبح

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

لذلك ، اذا كانت $\vec{F}$ محافظة ، يكون بامكاننا التكامل كما في البند (٤ـ٥) والحصول على نفس معادلة الطاقة اى ـ

$$\frac{1}{2} mv^2 + V(x,y,z) = \text{constant} = E \qquad (٤ـ٥٦)$$

اى ان الجسيم ولو يبقى على السطح او المنحني ، لكنه يتحرك • بمسار بحيث تكون الطاقة الكلية ثابتة • وهذه طبعا هي حالة التقيد الاملس •

مثــال

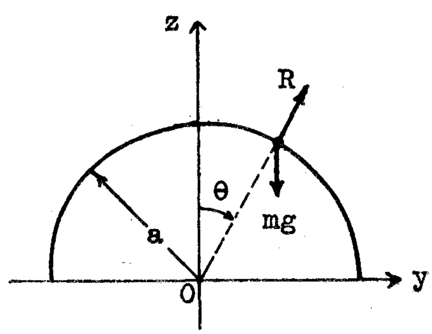
وضع جسيم على قمة كرة ملساء نصف قطرها a • اذا ازيح الجسيم قليلا ، ففي ايــة نقطة سوف يترك الكـرة ؟

القوى المؤثرة على الجسيم هي قوة الجذب الارضي الى الاسفل وقوة رد فعـل السطح الكروى $\vec{R}$ • فمعادلة الحركة اذ ن تكون

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}$$

لنختر الاحداثيات كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ٨) •فالطاقة الكامنة عندئذ تكــون mgz ، ومعادلة الطاقة تصبح

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$



الشكل (٤ ـ ٨) القوى المؤثرة على جسيم ينزلق على كرة ملساء

من الشروط الابتدائية ($v = 0$ لـ $z = a$) تكـــون $E = mga$ ،
لذلك ، انطلاق الجسيم عند انزلاقـه الى الاسفل يكون

$$v^2 = 2g(a - z)$$

والان، اذا اخذنا المركبات القطبية لمعادلة الحركة ، يمكننا كتابة معادلـة القـــوة على النحو التالي

$$-\frac{mv^2}{a} = -mg\cos\theta + R = -mg\frac{z}{a} + R$$

اذن

$$R = mg\frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg\frac{z}{a} - \frac{m}{a}2g(a - z)$$

$$= \frac{mg}{a}(3z - 2a)$$

اذن R تساوى صفرا عندما تكون $z = \frac{2a}{3}$ ، اى في النقطة التي يترك فيهـــا الجسيم الكـرة ، يمكن معرفة هذه ، من حقيقة كون تغير اشارة R هنـا ، مـــن الموجب الى السالب ·

(٤ـ١١) الحركة على منحني Motion on a Curve

للحالة التي تكون فيها حركة الجسيم مقيدة على منحني معين ، فمعادلة الطاقـة مـــع معادلات المنحني بشكلها البارمترى parametric form

$$x = x(s) \qquad y = y(s) \qquad z = z(s) \qquad (٤ـ٥٧)$$

تكفي لحساب الحركة· (البارمتر s يمثل المسافة المقاسة على طول المنحنـــي مـــن نقطة مرجعيه اعتباطية) · ويمكن ايجاد الحركة اذا اخذنا بنظر الاعتبار امكانية تمثيـــل الطاقة الكامنة كدالة للموضــع s فقط ، بينما الطاقة الحركية عبارة عـــن $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ · اذن يمكن كتابة معادلة الطاقة كالاتي

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E \qquad (٤ـ٥٨)$$

ومن هذه المعادلة يمكن ايجاد s (اى x ، y ، z) بالتكامل ·

وهناك طريقة اخرى ، وهي بتفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن t واختصار

العامل المشترك $\dot{s}$ لنحصل على المعادلة التفاضلية التالية لحركة الجسـيم .

$$m\ddot{s} + \frac{dV}{ds} = 0 \qquad (٤ ـ ٥٩)$$

وهذه تكافيء المعادلة

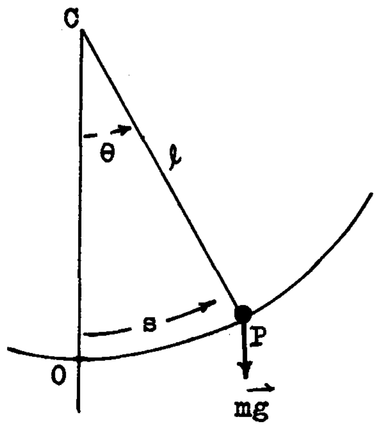
$$m\ddot{s} - F_s = 0 \qquad (٤ـ٦٠)$$

حيث F_s تمثل مركبة القوة الخارجية $\vec{F}$ باتجاه s ، وهذا يعنـي ان $F_s = -\frac{dV}{ds}$.

(٤ـ١٢) البنـدول البسيط The Simple Pendulum

ان ماذكرناه توا ، يوضح بصورة جيدة ، بواسطة البندول البسيط . وهو عبـارة عن جسيم ثقيل مربوط بطرف قضيب او حبل خفيفين غير قابلين للمد او البسط. وتكـون الحركة بمستو شاقولي . والبندول البسيط يكافيء ايضا من الناحية الداينايكية الخرزة المنزلقة على سلك دائرى املس في موضع شاقولي ، كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ٩) .

افرض ان θ



الشكل (٤ـ٩) البندول البسيط

تمثل الزاوية التي يصنعها الخيط CP مع الشاقول حيث C هي مركـز المسـار

الدائرى و P الموضع الآني للجسيم . وتقاس المسافة s من موضع الاستقرار، O ومن الشكل نرى ان المركبة F_s لقوة الجذب الارضي mg باتجاه s هـــي $-mg \sin \theta$. فاذا كان ℓ يمثل طول البندول عندئذ $\theta = s/\ell$. والمعادلـة التفاضلية للحركة تصبح

$$m\ddot{s} + mg \sin(\frac{s}{\ell}) = 0$$

اوقد نكتبها بدلالة θ على النحو الاتي ــ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \qquad (٤ ــ ٦١)$$

ويجب ملاحظة ان الطاقة الكامنة V هي mgz حيث z هي المسافة العمودية للجسيم من النقطة O ، اى ــ

$$V = mgz = mg\ell\ (1 - \cos \theta)$$

$$= mg\ell - mg\ell \cos(\frac{s}{\ell})$$

اذن

$$-\frac{dv}{ds} = -mg \sin(\frac{s}{\ell}) = -mg \sin \theta = F_s .$$

لايجاد الحل التقريبي لمعادلة الحركة التفاضلية ، نفرض ان θ تبقى صغيرة ، ففي هذه الحالة

$$\sin \theta \simeq \theta$$

وبذلك نحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \qquad (٤ ــ ٦٢)$$

وحل هذه المعادلة ، كما رأينا في البند (٣ ــ ٨) هو

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (٤ ــ ٦٣)$$

حيث $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ، θ_0 تمثل سعة التذبذب و ϕ_0 هي عامل الطور، اذن ، الى الحد الذى يكون فيه تقريب $\sin \theta$ الى θ سارى المفعول تكون الحركة توافقية بسيطة ، وزمن ذبذبتها T_0 هو

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (٤\text{ـ}٦٤)$$

وهي العلاقة البسيطة المشهورة ٠

(٤ـ١٣) الحل الاكثر دقة لمسألة البندول البسيط والتذبذب غير الخطي

More Accurate Solution of the Simple Pendulum Problem and the Nonlinear Oscillator:

المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

هي حالـة خاصة من المعادلات التفاضلية العامة لحركة تحت تاثير قوة معيـدة غيـر خطية ، اى ، قوة تتغير بنمط ما غير التناسب المباشر مع الازاحة ٠ ويمكـن كتابـة المعادلة العامة في خط مستقيم بدون تضاؤل على النحو التالي

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = 0 \qquad (٤\text{ـ}٦٥)$$

حيث المتغير ξ يمثل الازاحة من موضع الاستقرار ، بحيث

$$f(0) = 0$$

تتطلب المعادلات التفاضلية غير الخطية ، اعتياديا ، بعض الطرق التقريبية لحلهـا ٠ افرض ان الدالة $f(\xi)$ قد فكت كمتسلسلة اساسية power series في ξ ، اى

$$f(\xi) = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots$$

عندئذ المعادلة التفاضلية للحركة تصبح

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots = 0 \qquad (٤\text{ـ}٦٦)$$

هذا هو شكل مفكوك معادلة الحركة العامة لتذبذب غير خطي بدون تضاؤل الحـد $a_1\xi$ في المعادلة المذكورة اعلاه هو الحد الخطي ٠ اذا كان هذا الحد طاغيـا ، اى ، اذا كان a_1 اكبر بكثير من المعاملات الاخرى، عندئذ تكون الحركة تقريبـا

توافقية بسيطة بتردد زاوى مقداره $a_1^{\frac{1}{2}}$ • ولايجاد الحل الاكثر دقة يجب اخذ بنظر الاعتبار الحدود غير الخطية المتبقية •

لتوضيح ذلك ، دعنا نعود الى مسألة البندول البسيط• فاذا استخدمنا المتسلسلة

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots$$

واحتفظنا بالحدين الاول والثاني فقط ، فسنحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta - \frac{g}{6l}\,\theta^3 = 0 \qquad (٤\_٦٧)$$

كتقريب ثان للمعادلة التفاضلية للحركة • نعلم ، قبل كل شيء ان الحركة توافقية ولنفرض اننا نجرب حلا بشكل دالة جيبيه بسيطة مثل •

$$\theta = A \cos \omega t$$

فعند تعويض هذه ، في المعادلة التفاضلية ، نحصل على

$$-A\omega^2 \cos \omega t + \frac{g}{l} A \cos \omega t - \frac{g}{6l} A^3 \cos^3 \omega t = 0$$

اوعند استخدام المتطابقة المثلثية

$$\cos^3 u = \tfrac{3}{4} \cos u + \tfrac{1}{4} \cos 3u$$

وتجميع الحدود ، نحصل على

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{l} A - \frac{gA^3}{8l}\right)\cos \omega t - \frac{gA^3}{24l} \cos 3\omega t = 0$$

وباستثناء الحالة الاعتيادية $A = 0$ ، نرى ان المعادلة المذكورة اعلاه لايمكن ان تصح لجميع قيم t • لذلك دالة اختبارنا $A \cos \omega t$ لايمكن ان تكون حلا ، بسبب ظهور الحد $\cos 3\omega t$ في المعادلة المذكورة اعلاه ، ولكن قد نتوقع ان الحل الاختبارى بشكل

$$\theta = A \cos \omega t + B \cos 3\omega t \qquad (٤\_٦٨)$$

سيكون تقريبها افضل من $A \cos \omega t$ • وقد ثبت ان هذه هي الحالة المقصودة •
فاذا عوضنا الحل المذكور اعلاه في المعادلة (٤ـ٦٧) ، نحصل ، بعد اجراء
عمليات مشابهة للعمليات السابقة ، على المعادلة التالية ـ

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{\ell} A - \frac{gA^3}{8\ell}\right) \cos \omega t + \left(-9B\omega^2 + \frac{g}{\ell} B - \frac{gA^3}{24\ell}\right) \cos 3\omega t$$

+ (حدود لـ B مرفوعة لقوى اكبر ، واعلى مضاعفات لـ ωt) $= 0$

مرة اخرى لاتصح المعادلة لجميع قيم t ، ولكن ستكون دقة حلنا التقريبي معقولة
اذا امكن وضع كل من معامل الحدين الاولين لجيوب التمام مساويا للصفر كل على
انفراد • اى ان

$$-A\omega^2 + \frac{g}{\ell} A - \frac{gA^3}{8\ell} = 0, \quad -9B\omega^2 + \frac{g}{\ell} B - \frac{gA^3}{24\ell} = 0$$

من المعادلة الاولى

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{A^2}{8}\right) \qquad (٤ـ٦٩)$$

من قيمة ω^2 هذه ، نجد من المعادلة الثانية ان

$$B = -A^3 \frac{1}{3(64 + 27 A^2)} \simeq -\frac{A^3}{192}$$

الان ، من معادلة حلنا الاختبارى (٤ـ٦٨) نرى ان السعة θ_0 لتذبذب البندول
هي

$$\theta_0 = A + B$$
$$= A - \frac{A^3}{192}$$

او ، اذا كانت A صغيرة

$$\theta_0 \simeq A$$

معنى المعادلة (٤ـ٦٩) الان واضح • ويعتمد تردد التذبذب على السعة θ_0 •
وبالحقيقة يمكننا كتابته ،

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(1 - \tfrac{1}{8}\theta_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

او لزمن الذبذبة

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 - \tfrac{1}{8}\,\theta_0^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\,\theta_0^2 + \ldots.) \qquad (٤\_٧٠)$$

$$\simeq T_0(1 + \frac{1}{16}\,\theta_0^2 + \ldots)$$

حيث T_0 تمثل زمن الذبذبة لسعة مقدارها صفر كما حصلنا على ذلك في البند (٤ــ١٢) . ان التحليل السابق ، وان كان على نحو لايمكن معه انكار عدم اتقانه ، الا انه يوضح مظهرين جوهرين للتذبذب الحر تحت تاثير قوة معيدة غير خطية ، وهي ان زمن ذبذبة الاهتزاز هي دالة لسعة الاهتزاز ، ثم التذبذب ليس تماما داله جيبيه وانما يمكن اعتباره تداخلا من خليط من التوافقيات harmonics . ويمكن البرهنة على ان الاهتزاز لجهاز غير خطي . مدفوع بقوة دافعة جيبيه نقية سيكون مشوها ايضا . اى انه سوف يحتوى على توافقيات . فمثلا مكبر الصوت لمستلم الراديو او جهاز الهاى فاى قد يحدث تشويها (توافقيات) فوق وعلى تلك التي ادخلت من اجهزة التكبير الالكتروني .

(٤ــ١٤) الحل الدقيق لحركة البندول البسيط بدلالة التكاملات الموجزة

Exact Solution of the Motion of the Simple Pendulum by Means of Elliptic Integrals:

يمكن كتابة معادلة الطاقة من تعبير الطاقة الكامنة للبندول البسيط كالاتي ــ

$$\tfrac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell\,(1 - \cos\theta) = E \qquad .(٤\_٧١)$$

اذا سحب البندول جانبا بزاوية θ_0 (السعة) واطلق ($\dot{\theta}_0 = 0$) ، عندئذ $E = mg\ell\,(1 - \cos\theta_0)$. وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بعد نقل الحدود والقسمة على $m\ell^2$. على النحو التالي ــ

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\,(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (٤\_٧٢)$$

وعند استعمال المتطابقة ($\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$) ، يمكن كتابتها كالاتي

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{\ell}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (٤\_٧٣)$$

من المناسب تمثيل الحركة بدلالة المتغير ϕ المعرف بالمعادلة

$$\sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \frac{1}{k}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (٤\_٧٤)$$

وعند تفاضلها بالنسبة للزمن t ، نحصل على

$$(\cos\phi)\,\dot{\phi} = \frac{1}{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\dot{\theta}}{2} \qquad (٤\_٧٥)$$

من المعادلتين (٤ــ٧٤) و (٤ــ٧٥) يمكننا تحويل المعادلة (٤ــ٧٣) بسهولة الى معادلة مناظرة بدلالة ϕ ، اى

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 - k^2\sin^2\phi\right) \qquad (٤\_٧٦)$$

عندئذ يمكن ايجاد العلاقة بين ϕ و t بفرز المتغيرات والتكامل

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,F(k,\phi) \qquad (٤\_٧٧)$$

وتسمى الدالة

$$F(k,\phi) = \int_0^{\phi}(1-k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}\,d\phi$$

بالتكامل الموجز الناقص من النوع الاول Incomplete elliptic integral of the first kind.

ويحسب زمن ذبذبة البندول بملاحظة زيادة θ من 0 الى θ_0 بربع دورة واحدة ·
لذلك نرى ان ϕ تتغير من 0 الى $\frac{\pi}{2}$ بنفس الفترة الزمنية · اذن يمكننا كتابة زمن الذبذبة T كالاتي

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,K(k) \qquad (٤\_٧٨)$$

وتسمى الدالة

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}\,d\phi = F(k,\pi/2)$$

بالتكامل الموجز التــام من النوع الاول • وهناك جداول (٥) رتبت فيها قيـــــم التكاملات الموجزة • على اية حال يمكن ايجاد علاقة جبرية مقربة وذلك بفك تكامـــل المعادلة (٤ـ٧٨) باستخدام نظرية ذات الحدين ، والتكامل حدا فحـــــدا •

والنتيجة تكون

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} (1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi + \ldots)\, d\phi$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} (1 + \frac{k^2}{4} + \ldots\ldots) \qquad (٤ـ٧٩)$$

والان لقيم صغيرة للسعة θ_o ، نحصل على

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_o}{2} \simeq \frac{\theta_o^2}{4}$$

لذلك يمكننا كتابة التقريب

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} (1 + \frac{\theta_o^2}{16} + \ldots\ldots) \qquad (٤ـ٨٠)$$

الذي يتفق مع قيمــة T التي استنتجت في البند السابق •

مثـــال

جد زمن ذبذبة بندول بسيط يهتز بسعة (٢٠) درجة • استخدم جداول التكاملات الموجزة ، وقارنها ايضا مع القيم المحسوبة بالتقريبات المذكورة اعـــلاه •

---

(٥) انظر في كتاب L. M. Milne-Thomson, Jacobian Elliptic Function Tables, Dover, New York, 1950, or B. O. Peirce, A Short Table of Integrals, Ginn, Boston, 1929.

للسعة ٢٠° $k = \sin 10^\circ = 0.17365$

و $\theta_0/2 = 0.17453$ radians

النواتج هي كما يلي

من الجداول والمعادلة (٤ـ٧٨)

$$T = 4\sqrt{\ell/g}\,K(10^\circ) = \sqrt{\ell/g}\,(6.3312)$$

من المعادلة (٤ـ٧٩)

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}\,(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 10^\circ) = \sqrt{\ell/g}\,(6.3306)$$

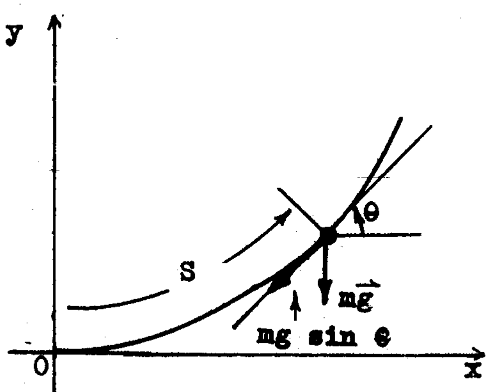
من المعادلة (٤ـ٨٠)

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}\,(1 + \theta_0^2/16) = \sqrt{\ell/g}\,(6.3310)$$

العلاقة الابتدائية $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g} = \sqrt{\ell/g}\,(6.2832)$

(٤ـ١٥) مسألة تساوى الزمن The Isochronous Problem

من الممتع تحرى السؤال فيما اذا كان هناك منحن مقيد ام لا ، بحيث يتذبذب فيه الجسيم تحت تأثير الجاذبية الارضية بازمان متساوية ، اى بزمن ذبذبة لايعتمد على السعة



الشكل (٤ـ١٠) القوى المؤثرة في حالة تساوى الزمن

افرض ان θ تمثل الزاوية بين الخط الافقي والماس للمنحني المقيد كما هو مبين في الشكل (٤ـ١٠) • عند ئذ تكون مركبة الجذب الارضي باتجاه الحركة $-mg \sin \theta$ والمعادلة التفاضلية للحركة على طول المسار المقيد (افرضه املس) عند ئذ تكون

$$m\ddot{s} = -mg \sin \theta \qquad (٤ـ٨١)$$

ولكن اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه تمثل حركة توافقية بسيطة على طول المنحني • فيجب ان نحصل على ـ

$$m\ddot{s} = -ks \qquad (٤ـ٨٢)$$

اذ ن • المنحني المقيد الذى يستوفي المعادلة

$$s = c \sin \theta \qquad (٤ـ٨٣)$$

سيسبب حركة توافقية بسيطة •

الان يمكننا ايجاد x و y بدلالة θ من المعادلة المذكورة اعلاه كالاتي

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\cos \theta)\,(c \cos \theta)$$

اذ ن

$$x = \int c \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{c}{4}\,(2\theta + \sin 2\theta) \qquad (٤ـ٨٤)$$

وبالمثل

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\sin \theta)\,(c \cos \theta)$$

وهكذا

$$y = \int c \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{c}{4} \cos 2\theta \qquad (٤ـ٨٥)$$

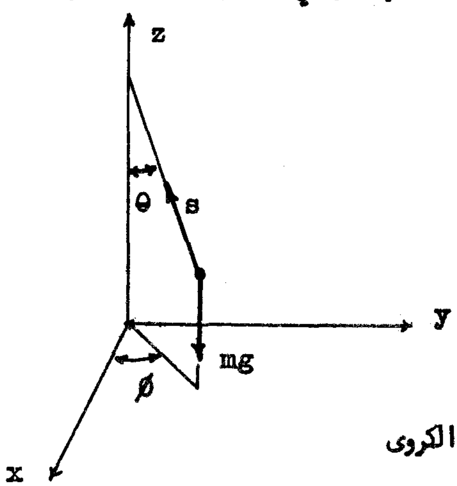
تمثل (٤ـ٨٤) و (٤ـ٨٥) معادلات البارمتر الدويرى cycloid • لذلك سيسبب المنحني المقيد الذى على شكل ديورى حركة تتغير فيها s توافقيا مع الزمن •

وسوف لايعتمد زمن الذبذبة على السعة • وكنتيجة طبيعية ، نرى ان الجسيم الذى يبدأ من السكون على منحن د ويرى املس سيستغرق نفس الزمن ليصل الى القعر بغض النظر عن نقطة البداية •

لقد اكتشف الفيزيائي والرياضي الهولندى كرستيا ن هويكن Christiaan Huygens الحقائق المذكورة اعلاه لعلاقتها بالمحاولات التي اجراها لتحسين بندول الساعات • كذلك اكتشف نظرية المحلات الهندسية لمراكز الانحناء (evolute) ووجد ان المحل الهندسي لمركز انحناء الدويرى هو دويرى ايضا • اذن عند تجهيز البندول (بحدود) دويرية ، فان حركة كرة البندول ، يجب ان تتبع مسارا دويريا وزمن الذبذبة اذن لايعتمد على السعة • وبالرغم من براعة الاختراع ، الا انه لم يستغل ابدا في تطبيقات عملية •

(٤ــ١٦) البندول الكروى The Spherical Pendulum

من امثلة الحركة المقيدة الكلاسيكية حركة جسيم على سطح كروى املس ، كانزلاق كتلة صغيرة داخل وحول اناء كروى املس • وقد تمثل الحالة بصورة ملائمة بواسطة كرة ثقيلة مربوطة في نهاية وتر او قضيب غير قابل للمط او البسط وتتأرجح بحرية بأى اتجاه كان حول نقطة ثابتة • كما هو مبين في الشكل (٤ــ١١) وهذا يسمى بالبندول الكروى



الشكل (٤ــ١١) البندول الكروى

الحل التقريبي بالاحداثيات الديكارتيه

هناك قوتان تؤثران على الجسم ، هما قوة الجذب الارضي التي تتجه نحو الاسفل وقوة الشد $\vec{S}$ في القضيب المقيد او الوتر . عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} \tag{٤-٨٦}$$

اذا اخذنا المحور ـ z بالاتجاه الشاقولي ، تكون مركبات معادلة الحركة بدلالة الاحداثيات الديكارتيه ، على النحو التالي

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S_x \\ m\ddot{y} &= S_y \\ m\ddot{z} &= S_z - mg \end{aligned} \tag{٤-٨٧}$$

ويمكن ايجاد حل تقريبي بسهولة عندما تكون الازاحة عن موضع الاستقرار صغيرة جدا ، حيث يكون مقدار الشد ثابتا تقريبا ومساويا الى mg ولما كانت $|x| \ll \ell$ ، $|y| \ll \ell$ ، $z \simeq 0$ عندئذ مركبات x و y للشد $\vec{S}$ تعطى بالعلاقات التقربة التالية

$$S_x \simeq -mg\frac{x}{\ell} \qquad S_y \simeq -mg\frac{y}{\ell}$$

والتي يمكن تحقيقها بسهولة من هندسة الشكل . ومعادلات x ـ y التفاضلية للحركة عندئذ تصبح

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{g}{\ell}y &= 0 \end{aligned} \tag{٤-٨٨}$$

وهذه مماثلة لمعادلات المتذبذب التوافقي ذي البعدين الذي سبق وان بحثناه في (٤-٧) والحلول هي

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \alpha) \\ y &= B\cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{٤-٨٩}$$

حيث

$$\omega = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{٤-٩٠}$$

كما فـــي البندول المستوى البسيط •
الى الحد الذى تكون فيه تقريباتنـــاسارية المفعول ، يكون مسقط الحركة على المســتوى $x\ y$ — قطعا ناقصا • هناك ، طبعا ، حالات خاصة يكون فيها المسقط خطـــا مستقيما او دائرة ويعتمد ذلك على الشروط الابتدائية •

الحل باستخدام الاحداثيات الكروية

سنستخدم الاحداثيات الكروية كما عُرّفت في الشكل (٤ـ١١) لمعالجة البنـدول الكروى بدقة اكثر من التي ذكرت اعلاه • هناك للشد $\vec{S}$ مركبة قطبية واحـدة فقـــط بينما للثقل $m\vec{g}$ مركبتان قطبية $mg\cos\theta$ ومستعرضة $-mg\sin\theta$ لذلـــك يمكن تحليل المعادلة التفاضلية للحركة بالاحداثيات الكروية على النحو التالـــي —

$$
\begin{aligned}
ma_r &= F_r = mg\cos\theta - S \\
ma_\theta &= F_\theta = -mg\sin\theta \\
ma_\phi &= F_\phi = 0
\end{aligned}
\qquad (٤ـ٩١)
$$

سبق وان استنبطت مركبات التعجيل الثلاث a_ϕ, a_θ, a_r في الفصل الثانـــي ، البند (٢ـ٩) ، ولما كان التقيد هو $r = \ell = \text{constant}$

فيمكننـــا اهمال المركبة القطبية للتعجيل ، والمركبتان الاخريتـــان تصبحـــان —

$$a_\theta = \ell\ddot{\theta} - \ell\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$a_\phi = \ell\ddot{\phi}\sin\theta + 2\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta$$

وبعد نقل الحدود واجراء الاختصارات الضرورية تصبح المعادلات التفاضليـــــــــة فـــي θ , ϕ على النحو التالي —

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (٤ـ٩٢)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \qquad (٤ـ٩٣)$$

المعادلة الثانية تعني ان الكمية المحصورة بين القوسين ثابتة ، فلنسمهـــــا h •

عندئذ يمكننا كتابــة

$$\dot{\phi} = \frac{h}{\sin^2 \theta} \qquad (٤ \_ ٩٤)$$

عندتعويض قيمة $\dot{\phi}$ المذكورة اعلاه في المعادلة (٤ـ٩٢)، نحصـل علــى المعادلة المفروزة فـي θ التالية ـ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta - h^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0 \qquad (٤ \_ ٩٥)$$

من المستحسن تناول بعض الحالات الخاصة في هذا الصدد ٠ اولا اذا كانت الزاويــة ϕ ثابتة ، عندئذ $\dot{\phi} = 0$ ولذلك $h = 0$ ٠ اذن تصبح المعادلـــة (٤ـ ٩٥) كالاتي ـ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

وهذه هي بالضبط المعادلة التفاضلية للبندول البسيط٠ والحركة تحدث فـي المستوى

$$\phi = \phi_0 = \text{constant} \quad (\text{ثابت})$$

الحالة الخاصة الثانية هي البندول المخروطي conical pendulum الذى فيه (ثابت) $\theta = \theta_0 = \text{constant}$ ٠ وفي هذه الحالة $\dot{\theta} = 0$ و $\ddot{\theta} = 0$ ، لذلك تختصر المعادلة (٤ـ٩٥) الى

$$\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - h^2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} = 0$$

او

$$h^2 = \frac{g}{\ell} \sin^4 \theta_0 \sec \theta_0 \qquad (٤ \_ ٩٦)$$

من قيمة h المبينة في المعادلة السابقة ، نجد من المعادلة (٤ـ٩٤) ، ان

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{\ell} \sec \theta_0 \qquad (٤ \_ ٩٧)$$

كشرط لحركة البندول المخروطي

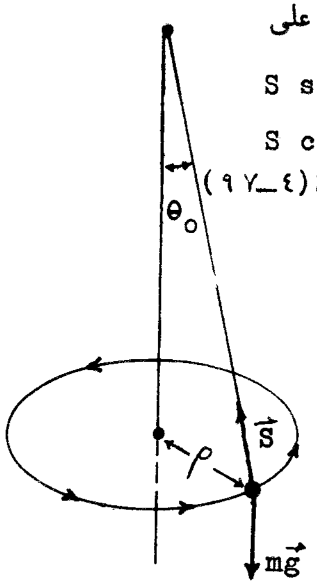
يمكن كذلك استنباط المعادلة السابقة ، اذا اخذنا بنظر الاعتبار القوى المؤثرة على الجسيم في حركته الدائرية ، كما هو مبين في الشكل (٤ـ١٢) . التعجيل ثابت المقدار ، اى $(\ell \sin \theta_0)\dot{\phi}_0^2 = \rho\dot{\phi}_0^2$ ، ويتجه نحو مركز المسار الدائري .

اذن ، عند اخذ المركبات الافقية والعمودية ، نحصل على

$$S \sin\theta_0 = (m\ell \sin\theta_0)\,\dot{\phi}_0^2 \qquad (٤ـ٩٨)$$

$$S \cos\theta_0 = mg$$

وعند حذف S بين المعادلتين نحصل على المعادلة (٤ـ٩٧)



الشكل (٤ ـ ١٢)
الحالة المخروطية للبندول الكروى

لنفرض الان الحالة التي تكون فيها الحركة مخروطية ، الى حد بعيد ، اى ، تبقى قيمة θ قريبة من قيمة θ_0 . فاذا عوضنا عن مقدار h^2 من المعادلة (٤ ـ ٩٦) ، في المعادلة التفاضلية المفروزة في θ ، اى المعادلة (٤ـ٩٥) فان النتيجة تكون

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\left(\sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) = 0 \qquad (٤ـ٩٩)$$

من الملائم هنا ، ادخال متغير جديد ξ والمعرف كما يلي

$$\xi = \theta - \theta_0 \qquad (٤ـ١٠٠)$$

وفك القوس في المعادلة (٤ـ٩٩) كمتسلسلة اساسية في ξ وفقا للعلاقة القياسية التالية

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\,\xi + f''(0)\,\frac{\xi^2}{2!} + \cdots\cdots$$

نجد بعد اجراء العمليات الضرورية ، ان $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$.

ولما كانت تهمنا الحالة التي تكون فيها قيم ξ صغيرة ، فسنهمل ξ المرفوعة الى قوى اكبر من واحد ، وبذلك نستطيع كتابة المعادلة (٤ـ٩٩) على الشكل التالي —

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{l}\, b\, \xi = 0 \qquad (٤ـ١٠١)$$

حيث $b = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$. فالحركة بدلالة ξ او θ اذن تكون

$$\xi = \theta - \theta_0 = \xi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{gb}{l}}\, t + \epsilon\right) \qquad (٤ـ١٠٢)$$

اذن تتذبذب θ توافقيا حول القيمة θ_0، بزمن ذبذبة مقداره —

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}} \qquad (٤ـ١٠٣)$$

والان قيمة $\dot{\phi}$ ، من المعادلة (٤ـ٩٤) ، لاتتغير كثيرا عن القيمة المبينة في الحركة المخروطية الصرفة $\dot{\phi}_0$ ، لذلك تزداد ϕ باستمرار خلال تذبذب θ حول θ_0 . وقد وضح مسار الجسيم في الشكل (٤ ـ١٣) . وتزداد قيمة زاوية السمت ϕ خلال ذبذبة واحدة كاملة للزاوية θ بمقدار

$$\phi_1 = \dot{\phi}_0 T_1$$

من قيم $\dot{\phi}_0$ و T_1 المذكورة اعلاه ، نجد بسهولة ان

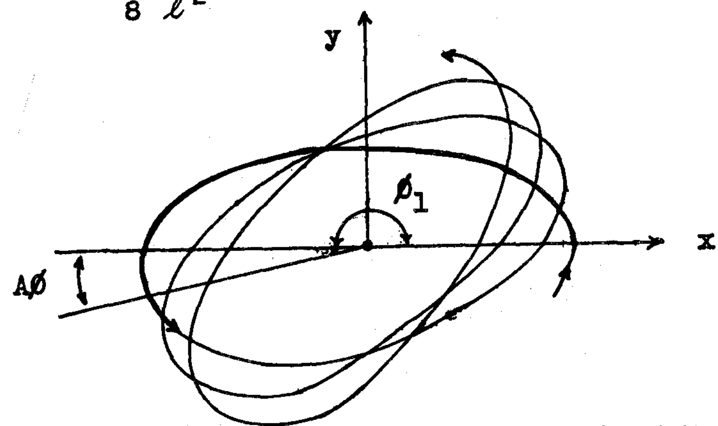
$$\phi_1 = 2\pi(3\cos^2\theta_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} \qquad (٤ـ١٠٤)$$

لنفرض ان ρ تمثل نصف قطر الدائرة عندما تكون $\theta = \theta_0$ ، كما هو مبين في الشكل (٤ ـ١٢) . عندئذ $\cos^2\theta_0 = 1 - \rho^2/l^2$ وبناء على ذلك يمكن كتابة المعادلة (٤ ـ١٠٤) على النحو التالي $\phi_1 = 2\pi(4 - 3\rho^2/l^2)^{-\frac{1}{2}}$

اذن ϕ_1 اكبر من π بقليل . وبفك القوس لقوى ρ ، نجد ان الزيادة $\Delta\phi$

تكـــون

$$\Delta \phi \cong \frac{3\pi \rho^2}{8\ \ell^2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (٤\_١٠٥)$$



الشكل (٤ ـ١٣)

المسقط على المستوى ـ y × لمسار حركة البندول الكـــروى

برهنا في بداية هذا البند ، ان مسقط مسار كرة البندول على المستوى ـ y × يكـــون تقريبا قطعا ناقصا ، اذا كانت الزاوية θ صغيرة . يمكننا الان تفسير النتيجـــة السابقة لتعني ان محور القطع الناقص الاكبر غير مستقر ، وانما يتقدم Precesses باتجاه ازدياد ϕ . حيث يدور محور القطع الناقص بزاوية $\Delta\phi$ خلال كل ذبذبة كاملـــة في θ . كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ١٣) .

اعتبارات الطاقة ـ غايات الحركة الشاقولية

Energy Considerations. Limits of the Vertical Motion

من المستحسن استخدام معادلة الطاقة ، لايجاد العلاقة بين سعة الذبذبـــة الشاقولية للبندول الكروى ومرتسمات المسألة ، بدلالة رموزنا ، تكون الطاقـــة الكامنـــة

$$V = -mg\ell \cos \theta$$

لايجاد الطاقة الحركية ، نستخدم مركبات السرعة بدلالة الاحداثيات الكروية والتي هي $(\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\phi}\sin\theta)$. اذن ، لما كانت ثابت $r = \ell$ لذلك نحصل على $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$.

عندئذ تصبح معادلة الطاقة

$$E = \frac{m\ell^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mg\ell\cos\theta \qquad (٤ \_ ١٠٦)$$

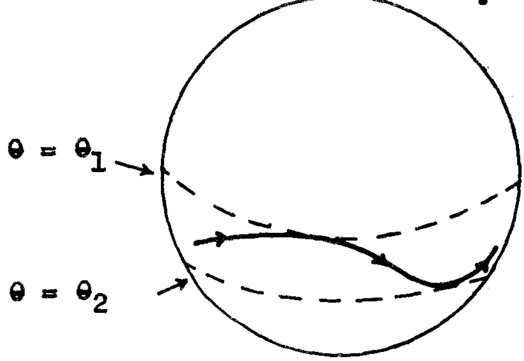
لنحل المعادلة المذكورة اعلاه لـ $\dot{\theta}^2$. لانجاز ذلك ، علينا استخدام العلاقة التي استنبطت سابقا ، والتي $\dot{\phi} = h/\sin^2\theta$. ولنفرض ايضا ان $\cos\theta = u$.

وبذلك تكون النتيجة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell}u - \frac{h^2}{1-u^2} = f(u) \qquad (٤ \_ ١٠٧)$$

وجذور المعادلة $f(u) = 0$ تعطي غايات او نقاط رجوع التذبذب في θ فلان $\dot{\theta}$ تتلاشى لهذه الجذور . والحركة تنحصر لقيم θ التي تكون فيها $f(u)$ غير سالبة . لذلك يقع التذبذب الشاقولي بين دائرتين افقيتين ، انظر الشكل (٤ _ ١٤) . في الحالة الخاصة التي يتساوى فيها الجذران الحقيقيان عندئذ تنحصر الحركة بدائرة منفردة افقية .

اي اننا نحصل على حالة البندول المخروطي .



الشكل (٤ _ ١٤)
توضيح الحركة الشاقولية للبندول الكروي

تمارين

٤ ــ ١ بايجاد الدوران (curl) ، بيّن أياً من القوى التالية محافظة ــ

(a) $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}czx + \hat{k}cxy$

(b) $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}cxy + \hat{k}czx$

(c) $\vec{F} = \hat{i}\frac{cy}{z} + \hat{j}\frac{cx}{z} - \hat{k}\frac{cxy}{z^2}$

(d) $\vec{F} = k\,\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{x^4 + y^4 + z^4}$

(e) $\vec{F} = k\,\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = k\vec{r}/r^4$

(f) $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$

(g) $\vec{F} = \hat{i}e^{a(x+y)} + \hat{j}e^{b(x+y)} + \hat{k}e^{cz}$

حيث $a \neq b$

(h) كما في (g) ولكن ضع $a = b$

٤ ــ ٢ جد دالة القوة التي ترافق كلاً من دوال الطاقة الكامنة التالية

(a) $V = k(x^2 + 2xy + y^2)$

(b) $V = ax^2 + bxy + cy^2$

(c) $V = kxy/z^2$

(d) $V = ke^{a(x+y+z)}$

(e) $V = ke^{a(x^2+y^2+z^2)}$

(f) $V = k(x + y + z)^n$

٤ ــ ٣ جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة دالة جهده $V = ax + by^2 + cz^3$.

اذا مر الجسيم من نقطة الاصل بانطلاق v_0 فما هو انطلاقه عندما يمر في

النقطـة (1 , 1 , 1) ؟

٤ ــ ٤ بين ان تغير الجاذبية مع الارتفاع يمكن حسابه مقربا من دالة الطاقـة الكامنـة التاليـة

$$V = mgz\left(1 - \frac{z}{R}\right)$$

حيث R يمثل نصف قطر الارض • جد القوة من دالة الجهد المذكورة اعلاه • ومنهـا جد مركبات المعادلات التفاضلية لحركة القذيفة تحت تأثير قوة كهذه •

٤ ــ ٥ افرض دالتي القوتين التاليتين ــ

$$(a)\quad \vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y \qquad\qquad (b)\quad \vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$$

بيّن ان (a) محافظة وان (b) غير محافظة • حقق ان $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لايعتمد على مسار التكامل لـ (a) • ولكنـه يعتمد لـ(b) • باخذ مسارين بدايتيهمـا نقطة الاصل (٠ر ٠) • ونهايتيهما النقطة (١ ر ١) • لاحد المسارين خذ المسـتقيم $x = y$ • وللمسار الاخر خذ المحور ــ x حتى النقطة (١ ر٠) • ثم خذ المسـتقيم $x = 1$ الى النقطة (١ ر١) •

٤ ــ ٦ في التمرين (٤ ــ ١) • جد دالة الطاقة الكامنة للقوى المحافظة •

٤ ــ ٧ اطلقت قذيفة من نقطة الاصل • بانطلاق ابتدائي v_o وميل θ مع الافـــق • اذا اهملت مقاومة الهواء • واعتبرت الارض مستوية • برهن ان القذيفة ستضرب الارض على مسافـة

$$\frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

من نقطة الاصل • هذه المسافة تسـمى بالمدى الافقي •

٤ ــ ٨ في التمرين (٤ ــ ٧) • اذا كانت مقاومة الهواء خطيه • فبرهن على ان النقصـان في المدى الافقي من نقطة الاصل يساوى تقريبا

$$4v_o^3 \gamma \sin\theta \sin 2\theta / 3g$$

٤ ـ ٩ اقذفت جسيمات من الطين من الحافة العليا لعجلة متدحرجة • اذا كان v_o الانطلاق الامامي للعجلة ونصف قطرها b ، اثبت ان اعلى ارتفاع يمكن ان يصله الطين فوق سطح الارض هو

$$b + \frac{v_o^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_o^2}$$

في اية نقطة سيترك الطين محيط العجلة المتدحرجة ؟

٤ ـ ١٠ وضعت بندقية في اسفل تل انحداره ثابت وليكن ϕ • برهن على ان مدى البندقية المقاس اعلى انحدار التل هو

$$\frac{2v_o^2 \cos\theta \sin(\theta - \phi)}{g \cos^2\phi}$$

حيث θ تمثل زاوية ميل البندقية •

٤ ـ ١١ اثبت ان اعظم قيمة لمدى الانحدار في التمرين السابق هو

$$v_o^2/g\,(1 + \sin\phi)$$

٤ ـ ١٢ اكتب مركبات المعادلة التفاضلية لحركة القذيفة ، اذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع الانطلاق • هل المعادلات قابلة للفرز ؟ بين ان مركبة ـ x للسرعة هي

$$\dot{x} = \dot{x}_o\, e^{-\gamma' s}$$

حيث s هي المسافة التي قطعتها القذيفة على طول مسار الحركة •

٤ ـ ١٣ اذا علمت ان $\omega = 2\ \mathrm{sec}^{-1}$ لمتذبذب توافقي معين موحد الخواص يتحرك في بعدين • واذا كانت الشروط الابتدائية هي

$$x_o = 2\ \mathrm{cm} \qquad \dot{x}_o = 0$$

$$y_o = 2\ \mathrm{cm} \qquad \dot{y}_o = 4\ \mathrm{cm/sec}$$

جد ثوابت مسار القطع الناقص وارسم القطع الناقص

٤ ـ ١٤ وضعت ذرة بداخل بلورة شبكية بسيطة مكعبة الشكل • اذا كانت الطاقة الكامنة للتصادم بين اى ذرتين من النوع $cr^{-\alpha}$ حيث c, α ثوابت و r المسافة بين الذرتين • اثبت ان الطاقة الكلية للتصادم لذرة معينة مع الذرات الست العائدة لها

والقريبة منها تقريبا تساوى جهد متذبذب توافقي ذى الابعـــاد الثـــــلاثـــة

اى :- $V = A + B\ (x^2 + y^2 + z^2)$

حيث A ، B ثوابت • (ملاحظة ــ افرض ان الذرات الست المجاورة ثابتة ومواضعهـــا

هي النقاط $(\pm d,\ 0,\ 0)$ ، $(0,\pm d,0)$ ، $(0,0,\ \pm d)$ والازاحـــــة

$(x,\ y,\ z)$ للذرة من موضع الاستقرار $(0,0,0)$ صغيرة بالمقارنة مع d) •

٤ ــ ١٥ جسيم وحدوى الكتلة يتحرك في جهد متذبذب توافقي ثلاثي الابعاد وغيـــر

موحد الخواص $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ فاذا مر الجسيم في نقطة الاصل بانطـــلاق

مقداره واحد وباتجاه (١ ، ١ ، ١) في الزمن $t = 0$ جد x,y,z كدوال للزمـــن •

٤ ــ ١٦ يتحرك الكترون في مجال قوة يتكون من مجال كهربائي منتظم $\vec{E}$ ومجـــال

مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ عموديا على $\vec{E}$ • افرض ان $\vec{E}=\hat{j}E$ و $\vec{B}=\hat{k}B$ • وخـــذ

موضع الالكترون الابتدائي في نقطة الاصل وبسرعة ابتدائية $\vec{v}_0=\hat{i}v_0$ • وباتجـــاه x •

جد محصلة الحركة للجسيم • واثبت ان مسار الحركة هو الدويرى

$$x = a \sin \omega t + bt$$
$$y = c(1 - \cos \omega t)$$
$$z = 0$$

ويستفاد من الحركة الدويرية للالكترون في المكنترون magnetron وقد استخـــدم

الصمام الالكتروني للحصول على موجات راديوية عالية التردد •

٤ ــ ١٧ • وضع جسيم على جانب كرة ملساء نصف قطرها b وعلى مسافة $b/2$ مـــن

مستواها المركزى • عند انزلاق الجسم اسفل جانب الكرة • فبأى نقطة سوف يتركهـــا •

٤ ــ ١٨ • تنزلق خرزة على سلك محلزن املس محوره شاقولي • فاذا كان نصف قطـــر

الحلزون b وهناك n لفــة في وحدة الطول • جد تعجيل الخرزة كدالــة للزمـــن •

افرض ان الخرزة تبدأ من السكون •

٤ ــ ١٩ تنزلق خرزة على سلك دائري املس نصف قطره b • فاذا كان مستوى الحلقة شاقوليا ، وابتدأت الخرزة من السكون من نقطة بمستوى مركز الحلقة • جد انطلاق الخرزة في الاسفل ورد فعل السلك على الخرزة في هذه النقطة •

٤ ــ ٢٠ في التمرين السابق جد الزمن اللازم للخرزة حتى تنزلق الى اسفل الحلقة • اعتبر b مساوياً الى ١٠ سم •

٤ ــ ٢١ استخدم بندول بسيط في تجربة مختبرية لايجاد قيمة g . اذا كانت سعة تذبذب البندول ٣٠ ° ، جد الخطأ الذي يسببه استخدام العلاقة الابتدائية التالية ــ

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

٤ ــ ٢٢ بندول كروي طوله متر واحد يصنع ذبذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية θ_0. اذا كانت θ_0 تساوي ٣٠ ° ، جد زمن ذبذبة الحركة المخروطية ، وزمن ذبذبة θ حول θ_0 وزاوية التقدم $\Delta\phi$ •

٤ ــ ٢٣ برهن على ان الجذرين الحقيقيين للمعادلة $f(u)=0$ ، اى المعادلة (٤ ــ ١٠٧) يتساويان في حالة البندول المخروطي •

٤ ــ ٢٤ ثبت سلك بندول كروي طوله ℓ في موضع ابتدائي بحيث يصنع زاوية ٩٠ ° مع الشاقول • فاذا ابتدأت الكرة بسرعة افقية v_0 عمودياً على السلك • وكان

$$v_0^2 = \tfrac{1}{2}\, g\ell$$

جد اوطأ مستوى تصله كرة البندول خلال حركتها • [تلميح ــ من الشروط الابتدائية ، $u = 0$ هي احدى جذور المعادلة $f(u) = 0$] •

الفصـــل الخامـــــس

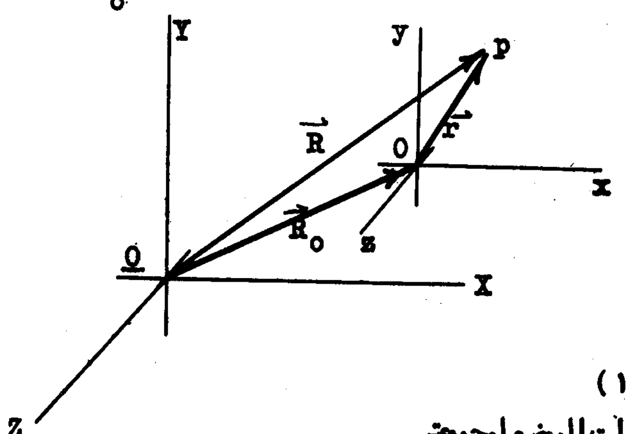
حركة المحاور المرجعيـــة Moving Reference Systems

من الافضل ، في اغلب الاحيان استخدام محاور متحركة لوصف حركـة جســـيم • فبالرغم من حركة الارض ودورانها مثلا يفضل استخدام محاور مثبتـه فيها لدراســـة حركـة القذيفـة •

٥-١) حركة المحاور الانتقالية Translation of the Coordinate System

ان حركة المحاور الانتقالية هي ابسط انواع الحركات• ففي الشكل (٥-١) تمثـل $\underline{O}XYZ$ المحاور الاساسية (فرضت ثابتة)و $\underline{O}xyz$ المحاور المتحركة• وفي حالـــة الحركة الانتقالية تبقى المحاور المتعاقبة $\underline{O}X$ و $\underline{O}x$ وهلم جرا ، متوازية• فاذا كـان $\vec{R}$ يمثل متجه موضع الجسيم P في المحاور الاساسية او الثابتة هو $\vec{r}$ فـسي المحاور المتحركة ، وكانت $\vec{R}_o$ تمثل ازاحة نقطة الاصل المتحركة $\underline{O}O$ • اذن

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_o \qquad (٥-١)$$



الشكل (٥-١)
العلاقة بين متجهات الموضع لمجموعتي محاور ، يتحرك كل منهما حركـــــة انتقالية محضة بالنسبة للآخــــــــر

عند اخذ مشتقة الزمن الاولى والثانية، نحصل على متجهي السرعة والتعجيل، اى

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_o \tag{٥ ـ ٢}$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_o \tag{٥ ـ ٣}$$

حيث $\vec{V}_o$ و $\vec{A}_o$ يمثلان سرعة وتعجيل نقطة الاصل المتحركة على التتالي و $\vec{a}, \vec{v}$ سرعة وتعجيل الجسيم P في المحاور المتحركة على التتالي .

في الحالة الخاصة ، عندما تكون المحاور المتحركة غير معجلة، اى $\vec{A}_o = 0$ عندئذ

$$\vec{A} = \vec{a}$$

اى ان، التعجيل متساو في مجموعتي المحاور، وهذه تصح فقط في حالة انعدام الحركة الدورانية في المحاور المتحركة. سوف ندرس موضوع الحركة الدورانية في البند (٥ ـ ٣) القادم.

٥ ـ ٢) القوى الزائفة Inertial Forces

اذا فرضنا ان قانون نيوتن الثاني

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

يصح في المحاور الاساسية، عندئذ ، من المعادلة (٥ـ٣) ، معادلة الحركة في المحاور المتحركة، تكون

$$\vec{F} - m\vec{A}_o = m\vec{a} \tag{٥ـ٤}$$

اذن يمكن اخذ تعجيل المحاور المرجعية $\vec{A}_o$ ، بنظر الاعتبار، وذلك باضافة الحد $-m\vec{A}_o$ الى القوة $\vec{F}$. وسوف نسمي هذا بالحد الزائف inertial term .

فاذا رغبنا ، فيمكننا كتابة

$$"\vec{F}" = m\vec{a} \tag{٥ ـ ٥}$$

لمعادلة الحركة في المحاور المتحركة ، اذا ادخلنا الحد الزائف كجزء من القوة "$\vec{F}$" . وهذا الحد لم ينتج من تصادم الاجسام بعضها مع بعض ، كما هي الحالة في القوى الاعتيادية ، ولكنه ينجم من اختيار محاور مرجعية . والمحاور المرجعية النيوتونية ، كما شرحت في الفصل الثالث ، هي بالتعريف تلك المحاور التي لاتحتوى معادلة الحركة فيها على حدود زائفة .

تسمى بعض الاحيان الحدود الزائفة في معادلة الحركة بالقوى الزائفة او القوى الخيالية . على اية حال ، اذا كان هناك من يرغب ان يسميها قوى فهذا في الحقيقة مصطلح فني . ومهما يكن ، تظهر هذه الحدود عند استخدام محاور معجلة لوصف حركة جسيم .

مثـــال

قالب خشبي موضوع على طاولة افقية خشنة . فاذا عجلت الطاولة باتجاه افقي ، فما هي الشروط التي سينزلق بموجبها القالب ؟

لنفرض ان μ تمثل معامل الاحتكاك بين القالب وسطح الطاولة . عندئذ تكون لقوة الاحتكاك $\vec{F}$ قيمة عظمى هي μmg ، حيث m هي كتلة القالب . وشرط الانزلاق هو ان تتفوق القوة الزائفة $-m\vec{A}_0$ على قوة الاحتكاك ، حيث $\vec{A}_0$ يمثل تعجيل الطاولة . اذن ، شرط الانزلاق هو

$$|-m\vec{A}_0| > \mu mg$$

او

$$A_0 > \mu g$$

٥ ـ٣) الحركة العامة للمحاور

General Motion of the Coordinate System

لنعتبر الان الحالة التي تتحرك فيها المحاور المرجعية حركة انتقاليـــة ودورانية على حد سواء ، بالنسبة الى المحاور النيوتونية . لنمثل كالسابق متجه موضع الجسيم في المحاور المرجعية بالرمز $\vec{R}$ ، وفي المحاور المتحركة

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (\text{٥ ـ ٦})$$

عندئذ اذا كان $\vec{R}_o$ يمثل متجه موضع نقطة الاصل المتحركة كما هو مبين في الشكل (٥ـ٢) ، نحصل على

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r} = \vec{R}_o + \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (\text{٥ـ٧})$$

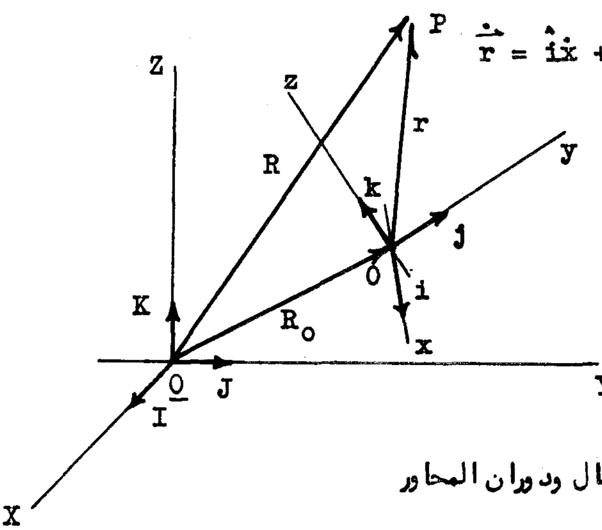
وبتفاضلها بالنسبة للزمن نجد ان

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_o + \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad (\text{٥ ـ ٨})$$

الكميــة $\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$

تمثل سرعة الجسيم بالنسبة للمحاور المتحركة . دعنا نسمي هذه السرعـــة $\dot{\vec{r}}$ ، اى ان

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$$



الشكل (٥ ـ ٢)

مخطط الحالة العامة لانتقال ودوران المحاور

سوف نستخدم نفس الرموز لما تبقى من هذا الفصل ، اى ان النقطة التي فوق المتجـــه تعني مشتقة ذلك المتجــه بالنسبة للزمن في المحاور الدائرة ٠ الحدود الثلاثة التاليـــة

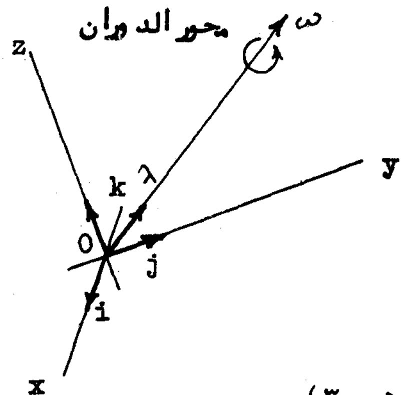
$$x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt}$$

تمثل السرعة الناشئة من دوران المحاور $Oxyz$.

لنمثل اتجاه محور الدوران في المحاور $Oxyz$ بالوحدة المتجهـــــه λ (الشكل ٥ ــ ٣) ، والانطلاق الزاوى للدوران حول هذا المحور بالرمـــز ω ٠

وسوف نسمى حاصل الضرب $\omega \lambda$ بالسرعة الزاوية للمحاور الدائرة ، اى يمكننا كتابـــة

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\lambda} \qquad (٥ ــ ٩)$$



الشـــكل (٥ ــ ٣)
متجه السرعة الزاوية للمحـــاور الدائـــــــرة

ويعين اتجاه متجــه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بقاعدة اليد اليمنى ، كما هو مبين في الشكل ٠

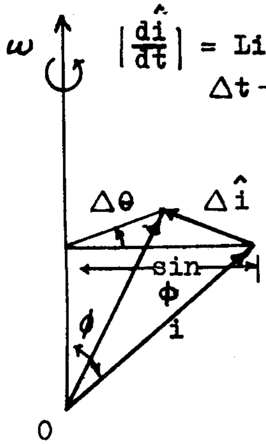
لايجاد $d\hat{i}/dt$, $d\hat{j}/dt$, $d\hat{k}/dt$ بدلالة $\vec{\omega}$ ، افرض الشـــــكل (٥ ــ٤) ٠ الذى يوضح التغيير $\Delta\hat{i}$ للوحدة المتجهة $\hat{i}$. (حذفت المتجهـــات

$\hat{k}, \hat{j}$ للوضوح) • من الشكل نرى ان مقدار $\Delta \hat{i}$ يساوى

$$|\Delta \hat{i}| \simeq (\sin \phi) \; \Delta \theta$$

حيث $\Delta \theta$ تمثل مقدار دوران المحاور $Oxyz$ الذى يحدث في فترة زمنية معينة Δt ، ϕ الزاوية بين $\hat{i}$, $\vec{\omega}$ • اذن

$$\left|\frac{d\hat{i}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \hat{i}}{\Delta t}\right| = (\sin \phi) \frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \phi$$



الشكل (٥ ـ ٤)
التغيير في الوحدة المتجهة $\hat{i}$
بسبب دوران المحاور

ولكن $\Delta \hat{i}$ عمودى على كل من $\vec{\omega}$, $\hat{i}$ • وبناء على ذلك يمكننا التعبير عن $d\hat{i}/dt$ بالضرب الاتجاهي للكميتين $\vec{\omega}$ و $\hat{i}$ • اى

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} \qquad (٥ ـ ١٠)$$

وبالتماثل

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} \qquad (٥ ـ ١١)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k} \qquad (٥ ـ ١٢)$$

اذن يمكننا التعبير عن ذلك الجزء من السرعة الناتجة من دوران المحاور كما يلي

$$x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} = x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k})$$
$$= \vec{\omega} \times (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (٥ - ١٣)$$

ووفقا لذلك ، تصبح المعادلة (٥ ــ ٨) على الشكل التالي

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_0 \qquad (٥ - ١٤)$$

تعبر المعادلة المذكورة اعلاه عن العلاقة بين مشتقات الزمن لمتجهي موضع جسيم متحرك في نظامي محاور، الاول اعتبر ثابتا والثاني يتحرك حركة انتقالية ويدور. ظهر الحد $\vec{V}_0$ بسبب الحركة الانتقالية للمحاور المتحركة فقط. كما انه لايظهر في حالة الحركة الدورانية المحضة .

عند اعتبار الحالة العامة لاى متجه مثل $\vec{q}$ سنرى بعد اجراء مناقشات مماثلة للمذكورة اعلاه ، ان مشتقة $\vec{q}$ بالنسبة للزمن هي

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}} + \vec{\omega} \times \vec{q} \qquad (٥ - ١٥)$$

حيث $\dot{\vec{q}}$ تمثل معدل التغيير الزمني للمتجه $\vec{q}$ في المحاور الدائرة ، وهي تساوى الكمية $\hat{i}\dot{q}_x + \hat{j}\dot{q}_y + \hat{k}\dot{q}_z$. والضرب الاتجاهي $\vec{\omega} \times \vec{q}$ يمثل معدل التغير الزمني للمتجه q الناتج من دوران المحاور ، اى

$$q_x\,(d\hat{i}/dt) + q_y\,(d\hat{j}/dt) + q_z\,(d\hat{k}/dt).$$

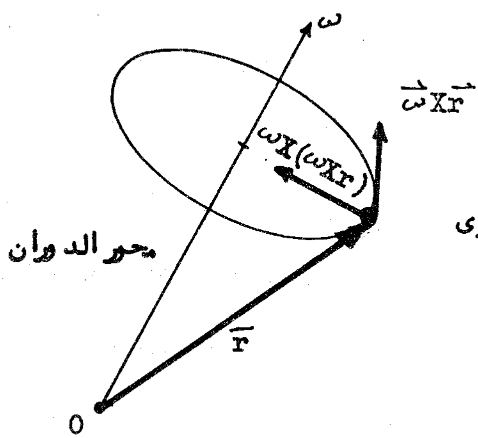
لنطبق المعادلة (٥ ــ ١٥) لايجاد العلاقة بين متجهات التعجيل .

افرض ان q تساوى الكمية $\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_o = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} X \vec{r}$ عندئذ نحصل على العلاقة التالية ــ

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} X\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} X\vec{r} + \vec{\omega} X(\vec{\omega} X\vec{r}) + \vec{A}_o \qquad (٥ ــ ١٦)$$

وقد تركت الخطوات كتمرين ٠ الحد الاول في الجانب الايمن من المعادلة يمثل تعجيل الجسيم في المحاور المتحركة ٠ اما الحدود الثلاث الاخرى فهي تمثل الحدود الدورانية لتعجيل الجسيم كما تلاحظ في المحاور الثابتة ٠ والحد الاخير هو تعجيل نقطة اصل المحاور المتحركة ٠

ويسمى الحد $2\vec{\omega} X\dot{\vec{r}}$ بالتعجيل الكوريولوى "Coriolis" ٠ والحد $\dot{\vec{\omega}} X\vec{r}$ بالتعجيل المستعرض Transverse ٠ والحد الاخير $\vec{\omega} X(\vec{\omega} X \vec{r})$ بتعجيل الجذب المركزى " Centripetal " ويتجه دائماً نحو محور الدوران ويكون عموديا عليه ، كما هو مبين في الشكل (٥ ــ ٥) ٠

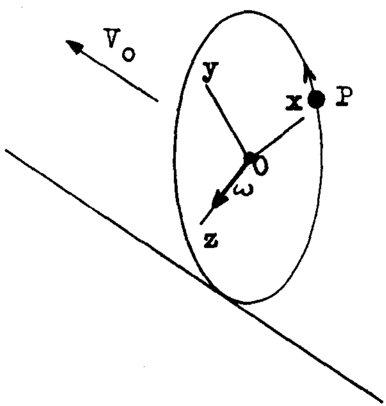


الشكل (٥ ــ ٥)
يوضح التعجيل المركزى

امثلـــــــة

١ـ عجلة نصف قطرها b تتدحرج على الارض بانطلاق امامي ثابت مقداره v ٠
جد التعجيل لاى نقطة على محيط العجلة بالنسبة للارض ٠

لنتخذ محاور مثبتـة في العجلة الدائرة ، ولنفرض ان نقطة الاصـل المتحركـة في مركز العجلة ، والمحور ـ x يمر من النقطة التي نود حساب تعجيلها كما هـــو موضح في الشكل (٥ ـ ٦) ٠



الشكل (٥ ـ ٦)
محاور دائرة مثبتة فـــي العجلـة المتدحرجـــة

عندئذ نجد ان

$$\vec{r} = \hat{i}b$$
$$\dot{\vec{r}} = 0$$
$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

ومتجه السرعة الزاوية هو

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\omega = \hat{k}\,\frac{v}{b}$$

للمحاور المختارة المبينة ٠ اذن تتلاشى جميع حدود التعجيل في المعادلة الجبريـــة ما عدا الحد الجذب المركزى ٠ وهو كما يلي ـ

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{k}\,\omega \times (\hat{k}\,\omega \times \hat{i}b)\\ &= \frac{v^2}{b}\,\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i})\\ &= \frac{v^2}{b}\,\hat{k} \times \hat{j}\\ &= \frac{v^2}{b}\,(-\hat{i})\end{aligned}$$

اذن مقدار $\vec{A}$ يساوى v^2 / b ، ويتجه دائما نحو مركز العجلة المتدحرجة

٢ـ دراجة هوائية تسير بانطلاق ثابت على طريق منحن نصف قطره ρ .

ما تعجيل اعلى نقطة ، لأى من العجلتين ؟

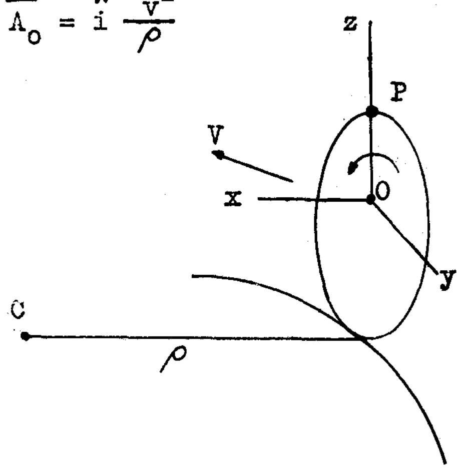
لنفرض ان v تمثل انطلاق الدراجة الهوائية و b نصف قطر العجلة .

لنختار محاور بحيث تكون نقطة اصلها في مركز العجلة ويكون المحور x افقيا متجها نحو مركز انحناء الطريق C . والمحور ـ z يكون عموديا كما هو واضح من الشكل (٥ ـ ٧) . اذن تدور المحاور $Oxyz$ بسرعة زاوية هي

$$\vec{\omega} = \hat{k} \frac{v}{\rho}$$

وتعجيل نقطة الاصل المتحركة هو

$$\vec{A}_o = \hat{i} \frac{v^2}{\rho}$$



الشكل (٥ ـ ٧)
عجلة تتدحرج على طريق منحن

لما كانت كل نقطة على العجلة تتحرك بدائرة نصف قطرها b بالنسبة الى نقطـــة الاصل المتحركة ، فالتعجيل في المحاور $Oxyz$ لاية نقطة علـى العجلـــة يتجـه نحو O ويكون مقداره v^2/b . لذلك ، تحصل في المحاور المتحركـــة علـى

$$\ddot{\vec{r}} = -\hat{k}\,\frac{v^2}{b}$$

للنقطة التي في اعلى العجلة . كذلك ، تكون سرعة هذه النقطة في المحاور المتحركـة علـى

$$\dot{\vec{r}} = -\hat{j}v$$

اذن ، يصبح التعجيل الكوريولي

$$2\,\vec{\omega}\,X\,\dot{\vec{r}} = 2\left(\frac{v}{\rho}\,\hat{k}\right)\,X\,(-\hat{j}v) = 2\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i}$$

لما كانت السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ ثابتة ، فالتعجيل المستعرض يكون صفـــرا .
كذلك تعجيل الجذب المركزي يكون صفرا ، لأن

$$\vec{\omega}\,X\,(\vec{\omega}\,X\,\vec{r}) = \frac{v^2}{\rho^2}\,\hat{k}\,X\,(\hat{k}\,X\,b\hat{k}) = 0$$

اذن التعجيل الكلي في اعلى نقطة للعجلة هو

$$\vec{A} = 3\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i} - \frac{v^2}{b}\,\hat{k}$$

٥ ــ ٤) ديناميك جسيم في محاور دائرة

Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System

لما كانت المحاور الثابتة قد اعتبرت محاور نيوتونيه ، عندئذ تكون المعادلـــة الاساسية للحركة هي

$$\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

ووفقا للمعادلة (٥ ــ ١٦) ، يمكننا الان كتابة معادلة الحركة بدلالة المحاور المتحركة كما يلي

$$\vec{F} - m\vec{A}_0 - 2m\,\vec{\omega}\,X\,\dot{\vec{r}} - m\,\dot{\vec{\omega}}\,X\,\vec{r} - m\,\vec{\omega}\,X(\vec{\omega}\,X\,\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} \qquad (١٧ــ٥)$$

لقد رتبت الحدود بشكل يظهر القوى الزائفة مضافة الى القوى الفيزيائية $"\vec{F}"$ واعطيت الحدود الزائفة الاسماء التالية –

القوة الكوريولية $F_{cor} = -2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

القوة المستعرضة $\vec{F}_{trans} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

القوة النابذة $\vec{F}_{cent} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

القوة المتبقية $\vec{mA_o}$ – هي الحد الزائف الناشئ عن الحركة الانتقالية للمحاور ، والذى سبق بحثه في البند (٥ – ٢) .

مرة اخرى ، كما في الشرح السابق للحد الزائف $-m\vec{A_o}$ ، يمكننا كتابة معادلة الحركة في المحاور المتحركة كما يلي

$$"\vec{F}" = m\ddot{\vec{r}} = m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z})$$

لذلك تصبح " القوة " الكلية

$$"\vec{F}" = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{trans} + \vec{F}_{cent} - m\vec{A_o} \qquad (٥ – ١٨)$$

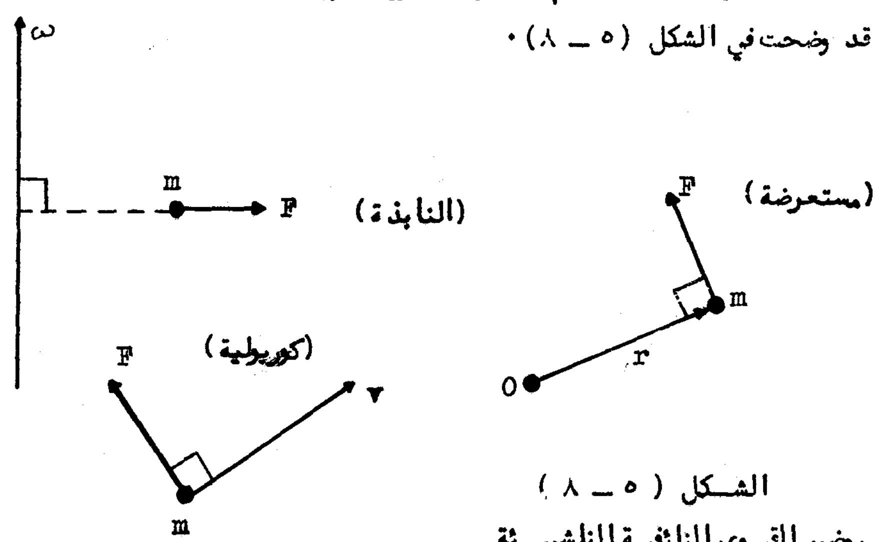
جميع الحدود الاربعة الزائفة في الجانب الايمن من المعادلة تعتمد على نوع المحاور التي وصفت فيها الحركة . وهي تنشأ من خواص استمرارية للمادة بدلا من تواجد اجسام اخرى .

للقوة الكوريولية اهمية خاصة . وتظهر فقط عندما يتحرك الجسيم في محاور دائرة . واتجاهها يكون دائما عموديا على متجه سرعة الجسيم في المحاور المتحركة . لذلك تبدو القوة الكوريولية وكانها تحرف جسيما متحركا باتجاه عمودى على اتجاه حركته . وهذه القوة مهمة ، مثلا ، في حساب مسار القذيفة . وتسبب التأثيرات الكوريولية دوران الهواء حول مساحات الضغط العالي والواطئ على سطح الكرة الارضية . لذلك في حالة المساحات ذات الضغط العالي يحاول الهواء التدفق الى

الخارج والى اليمين في نصف الكرة الارضية الشمالي ، بحيث يكون الدوران باتجاه عقرب الساعة . والامر على العكس في نصف الكرة الارضية الجنوبي .

وتظهر القوة المستعرضة اذا كان للمحاور الدائرة تعجيل زاوي فقط . وسميت هذه القوة بالمستعرضة لانها تكون دائما عمودية على متجه نصف القطر $\vec{r}$.

واخيرا تنشأ القوة النابذة ، وهي قوة مألوفة ، من الدوران حول محور . وتتجه دائما نحو الخارج مبتعدة عن محور الدوران وتكون عمودية عليه . فاذا كانت θ تمثل الزاوية بين متجه نصف القطر $\vec{r}$ ومتجه الدوران $\vec{\omega}$ ، عندئذ ، يكون مقدار القوة النابذة هو $mr\omega^2 \sin\theta$ أو $m\rho\omega^2$ حيث ρ يمثل المسافة العمودية بين الجسيم المتحرك ومحور الدوران . وهذه القوى المتنوعة قد وضحت في الشكل (٥ ــ ٨) .



الشكل (٥ ــ ٨)
يوضح القوى الزائفة الناشئة من دوران المحاور . وقد رسمت القوى بصورة منفصلة للوضوح

امثلـــــــــة

١ــ تزحف بقـه الى الخارج بانطلاق ثابت مقداره v على شعاع دولاب عجلة يدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور عمودي • جد جميع القوى المؤثرة على البقـــــــة •

لنختر اولا • محاور مثبتـة بالدولاب ولنفرض ان المحور ــ x يتجـه على طـــول شعاع الدولاب • عندئذ تكون

$$\vec{r} = \hat{i}x = \hat{i}vt$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}\dot{x} = \hat{i}v$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

هذه معادلات الحركة للبقة كما توصف في المحاور الدائرة • فاذا اخترنـا المحـــور ــ z شاقوليا • نحصل على

$$\vec{\omega} = \hat{k}\omega$$

عندئذ تكون القوى المتنوعة على النحو التالى ــ

القــوة الكوريولية

$$-2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -2m\,\omega v(\hat{k} \times \hat{i}) = -2m\,\omega v\hat{j}$$

القــوة المستعرضة

$$-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0 \quad (\omega = \text{ثابتــة})$$

القــوة النابـــذة

$$-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r) = -m\,\omega^2\left[\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}x)\right]$$

$$= -m\,\omega^2\,(\hat{k} \times \hat{j}x)$$

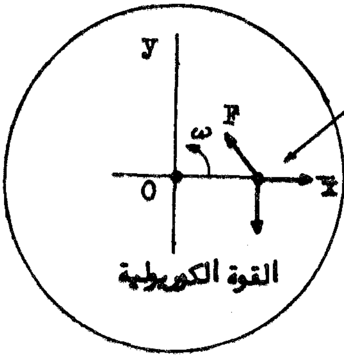
$$= m\,\omega^2 x\hat{i}$$

اذن المعادلة (٥ــ١٧) تصبح

$$\vec{F} - 2m\omega v\hat{j} + m\omega^2 x\hat{i} = 0$$

هنا القوة $\vec{F}$ هي القوة الحقيقية التي يسلطها شعاع الدولاب علـى البقـــــة •

لقد وضحت القوى في الشكل (٥ ـ ٩)



الشكل (٥ ـ ٩)
القوى على بقة تزحف الى الخارج
على طول الخط القطبي
لدولاب عجلة يدور

٢ـ في السؤال السابق ، جد المسافة التي يمكن ان تزحفها البقة قبل ان تبدأ بالانزلاق ، اذا علمت ان معامل الاحتكاك بين البقة والشعاع هو μ ٠

لما كانت لقوة الاحتكاك $\vec{F}$ قيمة عظمى هي μmg ، سيبدأ الانزلاق عندما

$$|\vec{F}| = \mu mg$$

او

$$\left[(2m\omega v)^2 + (m\omega^2 x)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mu mg$$

وعند حل هذه المعادلة للمسافة x ، نجد ان

$$x = \frac{(\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega^2}$$

وهي المسافة التي تزحفها البقة قبل ان تنزلق ٠

٥ـ٥) تاثيرات دوران الارض Effects of the Earth's Rotation

لنطبق النظرية التي بحثت في البنود السابقة لمحاور تتحرك مع الارض ٠لما كان الانطلاق الزاوى لدوران الارض يساوى 2π زاوية قطرية في اليوم ، او حوالي 7.3×10^{-5} زاوية نصف قطرية في الثانية ، قد نتوقع ان هذه التاثيرات للدوران صغيرة نسبيا ٠ وبالرغم من ذلك ، فان الانتفاخ الاستوائي تولد بسبب دوران الارض

حول نفسها وكما هو معروف فان نصف قطر الارض الاستوائي اكبر من نصف قطرها القطبي بحوالي ١٣ ميل ٠

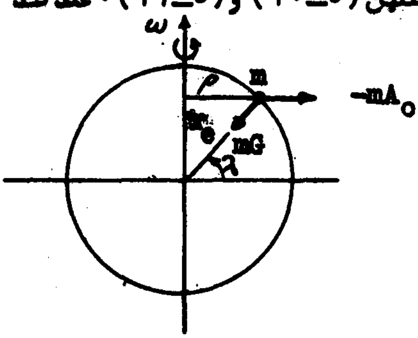
التأثيرات الستاتيكية ـ شاقول البناء

Static Effects. The Plumb Line

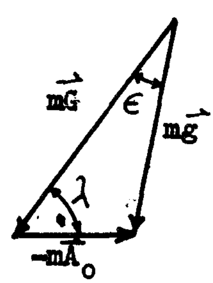
لنفرض اولا جسيم في حالة السكون على سطح الكرة الارضية ٠ ولكي نعطي صورة واضحة سنعتبر الجسيم يمثل الكرة التي في نهاية شاقول البناء ٠ لنختر نقطة اصل محاورنا في موضع الكرة ، بحيث تكون $\vec{r} = 0$ ٠ الان ، يتجه متجه السرعة الزاويه $\vec{\omega}$ باتجاه محور الارض وهو تقريبا ثابت ، اى ان ، التعجيل الزاوى $\dot{\vec{\omega}}$ يساوى صفرا ٠ عندئذ تتلاشى جميع حدود معادلة الحركة (٥ ـ ١٧) للحالة الستاتيكية ماعدا القوة المسلطة $\vec{F}$ والحد الزائف $-m\vec{A}_0$ وبذلك تكون النتيجة

$$\vec{F} - m\vec{A}_0 = 0 \qquad (٥ ـ ١٩)$$

وتعطي القوة $\vec{F}$ بالمجموع الاتجاهي للقوتين : قوة جذب الارض الحقيقية (التي سوف نسميها $m\vec{G}$) والشد العمودى لخيط شاقول البناء (الذى سوف نمثله بـ $-m\vec{g}$) ٠ وقد وضحت هاتين القوتين بالشكلين (٥ ـ ١٠) و (٥ ـ ١١) ٠ عندئذ نحصل على



الشكل (٥ ـ ١٠)
القوى النابذه والجذبية على جسم على سطح الكرة الارضية



الشكل (٥ ـ ١١)
مثلث المتجهات لتعريف الكمية $m\vec{g}$

$$\vec{mG} - m\vec{g} - m\vec{A}_o = 0 \qquad (٥\_٢٠)$$

او

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{A}_o$$

ويتجـه المتجـه $m\vec{G}$ نحو مركز الكرة الارضية · التعجيل $\vec{A}_o$ يمثل لتعجيـل الجذب المركزى لنقطة اصل محاورنا المتحركة · ومقداره هو $\omega^2 \rho$ او $\omega^2 (r_e \cos \lambda)$ حيث r_e يمثل نصف قطر الكرة الارضية و λ هي زاوية خط العرض مقاسة من مركـز الارض geocentric latitude ومقدار الحد $-m\vec{A}_o$ (القوة النابذه) يساوى $\omega^2 (mr_e \cos \lambda)$ · وهو يتجه الى الخارج ويكون عموديا على محـور الارض كما هو مبين في الشكل (٥ــ١٠) · لذلك لا يؤشر خط ميزان البناء نحو مركـز الكرة الارضية تماما ، وانما ينحرف بزاوية صغيرة ϵ · ومن المعادلة (٥ــ٢٠) يمكـن تمثيل المتجـه $m\vec{g}$ بالرسم ، كضلع ثالث للضلعين الآخرين $m\vec{G}$, $-m\vec{A}_o$ (الشكل ٥ ــ ١١) · وبتطبيق قانون الجيوب ، نحصل على

$$\frac{\sin \epsilon}{mr_e\omega^2 \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{mg}$$

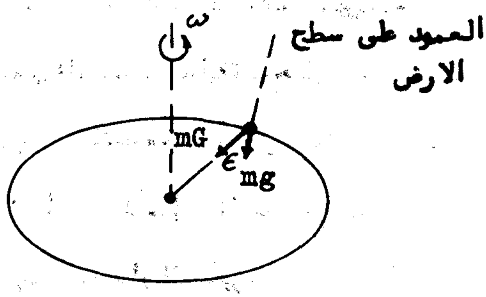
او ، لما كانت ϵ صغيرة ، فاننا نحصل على

$$\sin\epsilon \simeq \epsilon = \frac{r_e\omega^2}{g} \sin\lambda \cos\lambda = \frac{r_e\omega^2}{2g} \sin 2\lambda \qquad (٥ \_ ٢١)$$

لذلك تتلاشى ϵ في خط الاستواء ($\lambda = 0$) وفي القطبين ($\lambda = \mp 90^\circ$) ، كما توقعنا · ويكون الانحراف الاعظم لخط شاقول البناء عن العمود · الحقيقـي · عندما تكون $\lambda = 45^\circ$ حيث

$$\epsilon_{max} = \frac{r_e\omega^2}{2g} \simeq 1.7 \times 10^{-3} \text{ radian} \simeq \frac{1}{10} \text{ degree}$$

وشكل الارض يجعل خط شاقول البناء عموديا على سطحها في اية نقطة . والمقطع العرضي الناتج يكون تقريبا قطعا ناقصا (الشكل ٥ ـ ١٢) .في الشرح المذكور اعلاه



الشكل (٥ ـ ١٢)

رسم مبالغ فيه يوضح انبساط الارض الناشيء عن دورانها

فرضنا ان قوة الجذب $\vec{mG}$ ثابتة وتتجه نحو مركز الارض . ان هذا الفرض لايصح تماما لان الارض ليست كرة حقيقية . كذلك تؤثر قليلا ، الاختلافات المحلية ، كالجبال والترسبات المعدنية وهلم جرا على اتجاه شاقول البناء .

التاثيرات الديناميكية ـ حركة القذيفة Dynamic Effects. Motion of a Projectile

يمكن كتابة معادلة الحركة (٥ ـ ١٧) على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + (m\vec{G} - m\vec{A}_o) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

حيث $\vec{F}$ تمثل اى قوى مسلطة باستثناء قوة الجذب الارضي . ولكن ، من الحالة الستاتيكية التي شرحناها سابقا ، التركيب $m\vec{G} - m\vec{A}_o$ سمي $m\vec{g}$ ، اذن يمكننا كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

لنفرض حركة القذيفة . اذا اهملنا مقاومة الهواء ، عندئذ $F = 0$. اضف الى

ذلك الحد $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ـ يكون صغيرا جدا اذا قورن بالحدود الاخرى) لذلـــك سنهملـه • اذن تختصر معادلة الحركة الى

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} \qquad (٥ ـ ٢٢)$$

حيث يمثل الحد الاخير القوة الكوريولية •

ولحل المعادلة السابقة سنختار اتجاهات المحاور $Oxyz$ بحيث يكون المحـــور ـ z عموديا (باتجاه خط شاقول البناء) • والمحور ـ x متجها نحو الشرق • والمحـــور ـ y موءشرًا نحو الشمال (الشكل (٥ ـ ١٣) •

وبهذا الاختيار للمحاور • نحصل على

$$\vec{g} = -\hat{k}g$$

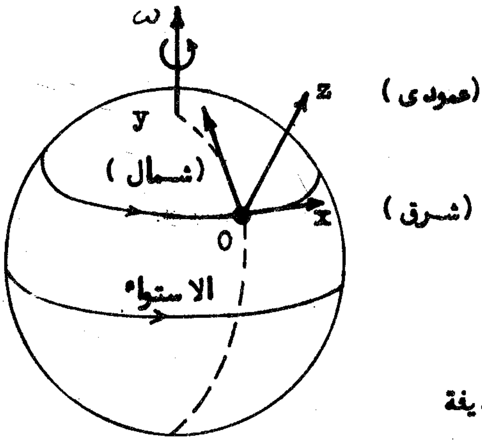
و

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}\\ &= (\omega\cos\lambda)\hat{j} + (\omega\sin\lambda)\hat{k}\end{aligned}$$

اذن

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= \hat{i}(\omega\dot{z}\cos\lambda - \omega\dot{y}\sin\lambda) + \hat{j}(\omega\dot{x}\sin\lambda)\\ &\quad + \hat{k}(-\omega\dot{x}\cos\lambda) \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (٥ ـ ٢٣)\end{aligned}$$



الشكل (٥ـ١٣)
المحاور لتحليل حركة القذيفة

وعند التعويض عن $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ في المعادلة (٥ ـ ٢٢) واختصار m من كل حـد ثم موازنة المركبات بين طرفي المعادلة نجد ان مركبات المعادلات التفاضلية للحركـة هـي

$$\ddot{x} = -2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \qquad (٥ ـ ٢٤)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda) \qquad (٥ ـ ٢٥)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda \qquad (٥ ـ ٢٦)$$

هذه المعادلات هي ليست من النوع القابل للفرز . ولكن يمكننا ان نكامل مـرة واحدة بالنسبة الى t للحصول على

$$\dot{x} = -2\omega(z\cos\lambda - y\sin\lambda) + \dot{x}_0 \qquad (٥ ـ ٢٧)$$

$$\dot{y} = -2\omega x\sin\lambda + \dot{y}_0 \qquad (٥ ـ ٢٨)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega x\cos\lambda + \dot{z}_0 \qquad (٥ ـ ٢٩)$$

حيث ثوابت التكامل $\dot{z}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{x}_0$ تمثل المركبات الابتدائية للسرعة . وعـند تعوض قيم $\dot{z}$, $\dot{y}$ من المعادلتين الاخيرتين السابقتين في المعادلة (٥ ـ ٢٤) .

والنتيجة تكون

$$\ddot{x} = 2\omega g t \cos\lambda - 2\omega(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) \qquad (٥ - ٣٠)$$

حيث اهملت الحدود التي تحتوى على ω^2 ، والان تكامل مرة اخرى لنحصل على

$$\dot{x} = \omega g t^2 \cos\lambda - 2\omega t(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) + \dot{x}_0$$

و

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega t^2(\dot{z}_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) + \dot{x}_0 t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (٥ - ٣١)$$

وقد تعوض قيمة x المذكورة اعلاه في المعادلتين (٥ - ٢٨) و(٥-٢٩) . وعند تكامل المعادلتين الناتجتين نحصل على

$$y = \dot{y}_0 t - \omega \dot{x}_0 t^2 \sin\lambda \qquad (٥-٣٢)$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t + \omega \dot{x}_0 t^2 \cos\lambda \qquad (٥-٣٣)$$

حيث اهملت ، مرة ثانية ، الحدود من مرتبة ω^2 على فرض ان القذيفة كانت في نقطة الاصل في الزمن $t = 0$.

لنفترض بعض الحالات الخاصة . اولا ، اذا سقط جسيم من السكون ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$) نحصل على

$$x = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda$$

$$y = 0$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2$$

اى ان الجسيم ينحرف نحو الشرق . فاذا سقط شاقوليا مسافة h يكون عندئذ $t^2 \simeq 2h/g$ ، وبذلك يكون الانحراف نحو الشرق

$$\tfrac{1}{3}\omega \cos\lambda \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولما كانت الارض تدور نحو الشرق ، قد نتصور بان الجسيم يجب ان ينحرف نحو الغرب . فهل يستطيع القارئ ان يجد تفسيرا لذلك ؟

كحالة خاصة ثانية ، افرض ان قذيفة قد اطلقت بسرعة عالية باتجاه يقترب من الافق ،

ولنفرض ان هذا الاتجاه هو الشرق • عندئذ

$$\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \quad , \quad \dot{x}_0 = v_0$$

ومن المعادلة (٥ ـ٣٢) نحصل على ـ

$$y = -\omega v_0 t^2 \sin\lambda$$

وذلك يعني ان القذيفة قد انحرفت نحو اليمين • واذا كانت H المدى الافقي • عندئذ $H \simeq v_0 t_1$ •حيث t_1 يمثل زمن الطيران • وانحراف القذيفة نحو اليمين (لقطع المسافة H شرقا) عندئذ • تقريبا • يكون

$$\frac{\omega H^2}{v_0} \sin\lambda$$

ويمكن البرهنة على ان هذا هو مقدار الانحراف • بغض النظر عن الاتجاه الذي وجهت اليه القذيفة في البداية • على ان يكون المسار ثابتا •

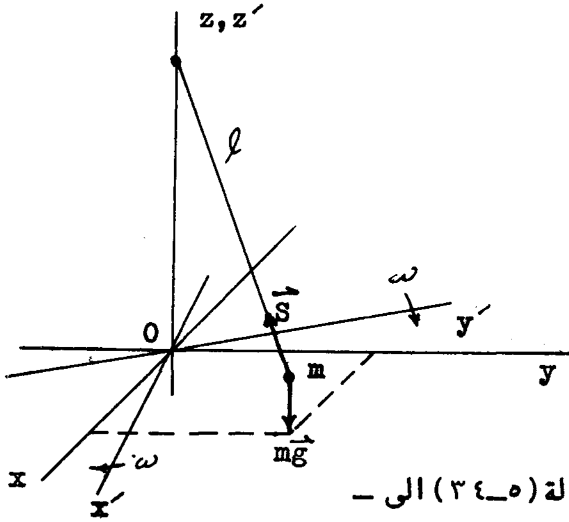
*٥ ـ ٦) بندول فوكو The Foucault Pendulum

سوف ندرس في هذا البند تاثير دوران الارض على حركة بندول كروي • وكالمعالجة التقريبية للبندول الكروى التي ذكرناها في البند (٥ـ٣٢) • سوف نستخدم المحاور المتعامدة • وكما هو مبين في الشكل (٥ـ١٤) • تكون القوة المؤثرة على كرة البندول هي الجمع الاتجاهي للحد الشاقولي $\vec{mg}$ والشد $\vec{S}$ في الوتر • عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \qquad (٥ـ٣٤)$$

حيث اهمل الحد $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ • وقد سبق ان اعطيت مركبات الحد $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ في المعادلة (٥ـ٢٣) • ومركبات y-x للشد $\vec{S}$ هي كما في البند (٤ـ١٤) •

$$S_x = \frac{-x}{\ell} S \qquad S_y = \frac{-y}{\ell} S$$



الشكل (٥ ـ ١٤)
بنـــدول فوكـــــو

عندئذ تحلل المعادلة (٥ـ٣٤) الى ـ

$$m\ddot{x} = \frac{-x}{\ell} S - 2m\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \qquad (٥ـ ٣٥)$$

$$m\ddot{y} = \frac{-y}{\ell} S - 2m\omega\dot{x}\sin\lambda \qquad (٥ ـ ٣٦)$$

$$m\ddot{z} = S_z - mg + 2m\omega\dot{x}\cos\lambda \qquad (٥ ـ ٣٧)$$

ان الحالة التي تهمنا هي عندما تكون الازاحة عن الشاقول صغيرة بحيث يكـــون الشد $\vec{S}$ تقريبا ، ثابتا ومساويا لـ mg • كذلك، في هذه الحالة، نستطيع اهمـال $\dot{z}$ بالمقارنة مع $\dot{y}$ في المعادلة (٥ـ٣٥) • وعندئذ تعطي حركـة $x-y$ بالمعادلات التفاضلية التالية ـ

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell} x + 2\omega'\dot{y} \qquad (٥ ـ ٣٨)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{\ell} y - 2\omega'\dot{x} \qquad (٥ ـ ٣٩)$$

حيث $\omega' = \omega \sin\lambda$. وبما يكون من السهولة تصور الحركة الممثلة في المعـــادلا ت التفاضلية المذكورة اعلاه عند تحويلها الى محاور جديدة $0xy$ تدور في المستـــوى xy ـ بانطلاق زاوى ثابت ω' بالنسبة الى المحاور $0xy$ (الشكل ٥ ـ ١٤) ومعادلات التحويل هي

$$x = x'\cos\omega' t + y'\sin\omega' t$$

$$y = y'\cos\omega' t - x'\sin\omega' t$$

وعند تعويض قيم $\ddot{x}$, y , $\ddot{y}$ (الناتجة من تفاضل المعادلات المذكورة اعـــلاه) في المعادلة (٥ ـ ٣٩)، نجد، بعد الاختصار وتجميع الحدود واهمال الحدود التي تحتوى على ω'^2 ان

$$\left(\ddot{x}' + \frac{g}{\ell}x'\right)\cos\omega' t + \left(\ddot{y}' + \frac{g}{\ell}y'\right)\sin\omega' t = 0$$

ولما كانت المعادلة السابقة يجب ان تصح لكل قيم t فان كلاً من معامـــل الجيـــب والجيب تمام يجب ان تساوى صفراً، اى

$$\ddot{x}' + \frac{g}{\ell}x' = 0 \qquad \ddot{y}' + \frac{g}{\ell}y' = 0$$

ان هذه المعادلات التفاضلية، كما رأينا في البند (٤ ـ ١٤)، تمثل الحركـــة فـــي مسار قطع ناقص. ولما كان قطر القطع الناقص الرئيسي له اتجاه ثابت في المحاور $0x'y'$ لذلك يعاني هذا القطر طوافاً Precession مستقراً باتجاه عقرب الســـــاعـــة (في نصف الكرة الشمالي) بانطلاق زاوى مقداره $\omega' = \omega\sin\lambda$ بالنسبة للمحاور $0xy$. وهذا الطواف يكون طبعاً، بالاضافة الى الطواف الطبيعي الذى سبق بحثــه في البند (٤ ـ ١٤). ولكن، اذا كانت الحركة الابتدائية للبندول في المحاور $0x'y'z$ في مستوى فسوف تبقى في هذا المستوى. (ولكي يبدأ البندول بهذه الطريقـــــة، من الضرورى سحبه جانبا بواسطة خيط ثم تركــه يبدأ من السكون بقطـــع هـــذا الخيط).

ان زمن ذبذبة طواف البندول هو $\frac{2\pi}{\omega'} = 24\ \mathrm{hr}/\sin\lambda$. لذلك ، في خط عرض ٤٥° يكون زمن الذبذبة ٣٤ ساعة . لقد وضحت هذه النتيجة لاول مرة من قبل العالم الفرنسي جان فوكو Jean Foucault في باريس سنة ١٨٥١ .

تمارين

٥ـ١) نقل شاقول بناء في قطار متحرك . فاذا كانت m تمثل كتلة كرة الشاقول ، جد الشد في الخيط وانحرافه عن العمود الموضعي اذا كان (آ) القطار يتحرك بتعجيل ثابت a_0 وباتجاه معلوم ، (ب) القطار يتحرك على منحن نصف قطره بانطلاق ثابت v_0 اهمل التاثيرات التي قد تنشأ عن دوران الارض .

٥ـ٢) سيارة تسير بتعجيل ثابت a_0 اذا كان انطلاقها في لحظة معينة v_0 . جد اى نقطة على التاير لها اعظم تعجيل بالنسبة الى الارض ، جد كذلك اتجاه هذا التعجيل ومقداره . .

٥ـ٣) في حركة الدراجة الهوائية مثال (٢) بند ٥ـ٣ ، ماهو تعجيل اوطأ نقطة في العجلة ؟

٥ ـ ٤) حل مثال (١) ، بند ٥ ـ ٣ ، عندما تكون نقطة اصل المحاور في مركز نصف القطر الدائر والمحور ـ x يمر في مركز العجلة والمحور ـ z عمودياً .

٥ـ٥) حشرة تزحف بانطلاق v في مسار دائرى نصف قطره b على قرص حاك دائر ، يدور بسرعة زاوية ثابتة ω . صف الحركة بالنسبة لمحاور مثبتة في القرص الدائر . جد التعجيل $\vec{A}$ للحشرة بالنسبة الى الخارج ، وقوة الاحتكاك $\vec{F}$ المؤثرة على الحشرة . وبصورة خاصة جد $\vec{A}$ و $\vec{F}$ للحالتين .

$$v = b\omega \quad , \quad v = -b\omega$$

لاحظ في الحالة الأخيرة ، ان الحشرة مستقرة بالنسبة الى الخارج .

٥ ـ ٦) طفل يركب دولاب هواء نصف قطره b ويدور بانطلاق زاوى ثابت ω . فاذا كان الطفل يمسك لعبة كتلتها m مربوطة بخيط قصير ، جد الشد في الخيط عندما يكون الطفل في اعلى واوطأ نقطة وفي مستوى مركز دولاب الهواء .

٥ ـ ٧) جد مقدار واتجاه القوة الكوريولية المؤثرة على سيارة سباق كتلتها ١٨٠٠ كغم وتسير نحو الشمال بانطلاق ٥٦٠ كم / ساعة وفي خط عرض ٤٥° شمالا .

٥ ـ ٨) سقط جسيم من ارتفاع ١٠٠ متر ، اين سيضرب الارض ؟ افرض λ تساوى ٤٥° شمالا .

٥ ـ ٩) نقل شاقول بناء في طائرة متحركة ، فاذا كانت الطائرة متجهة نحو الشرق بانطلاق v جد الانحراف الزاوى لخيط الشاقول عن العمود الموضعي . ما يجب ان تكون سرعة الطائرة حتى يكون الانحراف مساويا لدرجة واحدة ، افرض λ تساوى ٤٥° شمالا .

٥ ـ ١٠) بين ان معدل التغير الزمني لمتجه السرعة الزاوية يكون نفسه في المحاور الثابتة او الدائرة للشكل (٥ ـ ٢) اى ، اثبت ان $\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. هل يصح الشيء نفسه للتعجيل الزاوى ؟ .

٥ ـ ١١) اشتق تعبير للمشتقة الثالثة لمتجه الموضع $\frac{d^3\vec{R}}{dt^3}$ بدلالة المركبات في محاور دائرة .

٥ ـ ١٢) اطلقت قذيفة شاقوليا بانطلاق ابتدائي v_0 فاذا اهملت مقاومة الهواء وفرضت g ثابتة ، جد اين تسقط القذيفة عندما تضرب الارض .

٥ ـ ١٣) بندول كروى طوله ℓ يتحرك بذبذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية θ_0.

ماهي القيمة لـ θ_o التي يختزل فيها الطواف الناشيء عن دوران الارض، الطواف الطبيعي الذى سبق شرحه في الفصل الرابع ؟ افرض ان θ_o صغيرة. جد القيمة التقريبية عندما يكون ℓ يساوى ١٠ أمتار و λ تساوى ٤٥ شمالا.

٥ـ١٤) معادلة الحركة التفاضلية لجسيم مشحون ، في مجال كهربائي $\vec{E}$ ومجال مغناطيسي $\vec{B}$ هي

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

في المحاور النيوتونية . اذا نسبت الحركة الى محاور دائرة بسرعة زاوية $(q/2m)\ \vec{B}$ ، اثبت ان المعادلة تصبح

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

حيث فرضت $\vec{B}$ صغيرة بحيث يمكن اهمال الحدود من رتبة B^2 . وتعرف هذه النتيجة بنظرية لارمور Larmors Theorem .

الفصـــل الســادس

القـوى المركزية والميكانيك السماوى

Central Forces and Celestial Mechanics

القوة التي يمر خط تاثيرها في نقطة ثابتة او مركز قوة تسمى بالقوة المركزيـــــه Central Force وللقوى المركزيه اهمية اساسية في الفيزياء لانها ، تشمل قـوى مثل قوة جذب الارض وقوى الالكتروستاتيك وغيرها .

٦ ـ١) قانون الجاذبيـة The Law of Gravity

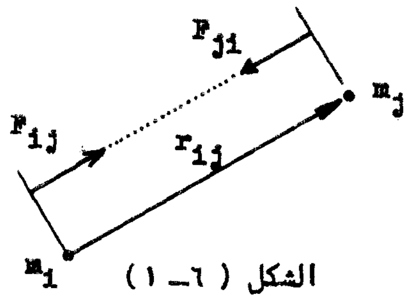
اعلن نيوتن قانون الجاذبية العام سنة ١٦٦٦ . وليس هناك مبالغة اذا قلنـا بان هذا قد سجل بداية علم الفلك الحديث ، لان قانون الجاذبية العام يفسر حركـة الكواكب السيارة للمنظومة الشمسية وتوابعها . وكذلك النجوم الثنائية او المزدوجـة وحتى المنظومات النجمية . ويمكن صياغة القانون على النحو التالي :ـ

كل جسيم في الكون يجذب كل جسيم آخر بقوة تتغير طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما عكسيا مع مربع المسافة بينهما . وتتجـه القوة على طول المستقيم الواصل بينهمـا .

ويمكننا التعبير عن القانون بجبر المتجهات بالمعادلة التالية .

$$\vec{F}_{ij} = G\,\frac{m_i m_j}{r_{ij}^{2}}\left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\right) \qquad (٦ـ١)$$

حيث $\vec{F}_{ij}$ تمثل القوة على جسيم i كتلتـه m_i التي يوءثر بها جسيـم j كتلتـه m_j . والمتجـه $\vec{r}_{ij}$ هو المستقيم الذى يبدأ في الجسيم i وينتهـي في الجسيم j ، كما هو مبين في الشكل (١ـ ٦) . ويقضـي قانـون الفعـل ورد الفعـل ان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. وثابت التناسـب G . يسمى بثابت الجاذبية العام . وتحسب قيمتـه بدقة في المختبر بقياس القـوة بيـن جسمين كرويين كتلتاهما معلومتان . والقيمة المقبولـة في الوقـت الحاضـر ،



الشكل (٦ـ ١)
الفعل ورد الفعل في قانون نيوتن للجاذبية

كما اوجدتها دار القياسات الوطنية الامريكية هي

$$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-8} \ \frac{\text{dyne cm}^2}{\text{g}^2}$$

وتعتمد جميع معلوماتنا الحاضرة عن كتل الاجرام السماوية وضمنها الارض على قيمـــة G.

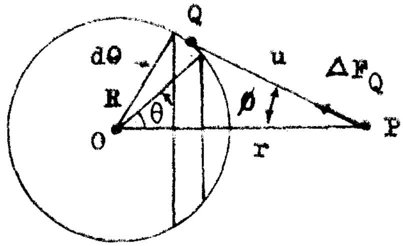
٦ـ٢) قـوة الجذب بين كرة منتظمة وجسيم

Gravitational Force between a Uniform Sphere and a Particle

في البند (٣ـ١١) ، حيث بحثنا حركة الجسيم حر السقوط ، اكدنا على ان قـوة جذب الارض على جسيم فوق سطحها تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين الجسيم ومركـز الكرة الارضية ، اى ان ، الارض تجذب وكأن جميع كتلتها متجمعه في نقطـة واحـدة . وسنبرهن الان على ان هذا يصح لاى جسم كروى منتظم اواى توزيع كروى متماثل للمادة .

افرض اولا قشرة كروية رقيقـة كتلتها M ونصف قطرها R . وافرض ان r المسافة بين مركزها O وجسيم اختبار P كتلتـه m (الشكل (٦ـ٢) . على فرض ان $R < r$. سوف نقسم القشرة الكروية الى حلقات دائرية عرض كل منها $\Delta \theta R$ حيث ـ كما هـو مبين في الشكل ، ان الزاوية POQ مثلت بالرمز θ و Q تمثل نقطة على الحلقة . لذا يكون محيط الحلقة $2\pi R \sin\theta$ ، وكتلتها ΔM تساوى

$$\Delta M \simeq \rho\, 2\pi R^2 \sin\theta\, \Delta\theta$$



الشكل (٦ ــ ٢)
الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لقشرة كروية

حيث ρ تمثل كتلة وحدة مساحة القشرة .

والان تتجه قوة الجذب المسلطة على P ، من جزء صغير لعنصر الحلقة في Q (الذى سوف نعتبره جسيما) ، باتجاه PQ . لنحلل هذه القوة $\Delta \vec{F}_q$ الى مركبتين ، احداهما على طول PO ، ومقدارها $\Delta F_q \cos\phi$ والاخرى عمودية على PO ، ومقدارها $\Delta F_q \sin\phi$. هنا ϕ تمثل الزاوية OPQ كما هو واضح في الشكل . من التناظر يمكننا بسهولة روءية تلاشي المجموع الاتجاهي لجميع المركبات العمودية للحلقة ، المسلطة على P . فالقوة $\Delta \vec{F}$ المسلطة من الحلقة كلها ، تكون اذن باتجاه PO ، ومقدارها ΔF ينتج من جمع المركبات $\Delta F_q \cos\phi$.
النتيجة اذن .

$$\Delta F = G \frac{m \Delta M}{u^2} \cos\phi = G \frac{m 2\pi \rho R^2 \sin\theta \cos\phi}{u^2} \Delta\theta$$

حيث u هي المسافة PQ (المسافة من الجسيم P الى الحلقة) كما هو مبين .
عندئذ من اخذ غاية $\Delta\theta$ والتكامل ينتج مقدار القوة المسلطة على P من كل القشرة اى

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \cos\phi \, d\theta}{u^2}$$

هذا التكامل يحسب بسهولة اذا وضعناه بدلالة u · ويكون ذلك باستخدام قانون الجيب تمام للمثلث OPQ ، حيث

$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta = u^2$$

ولما كانت R , r ثوابت فعند التفاضل نحصل على

$$rR\sin\theta\, d\theta = u\, du$$

كذلك لنفس المثلث OPQ يمكننا كتابة

$$\cos\phi = \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2rv}$$

وعند تعويض المعادلتين المذكورتين اعلاه نحصل على

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2u^2}\, du$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{u^2}\right) du$$

$$= \frac{GmM}{r^2}$$

حيث $M = 4\pi\rho R^2$ تمثل كتلة القشرة · يمكننا عندئذ كتابتها بجبر المتجهات على النحو التالي ـ

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{n} \qquad (٦\_٢)$$

حيث $\vec{n}$ تمثل وحدة متجه شعاعي يبدأ من المركز O · وتعني النتيجة السابقة ان القشرة الكروية المنتظمة الشكل لمادة عندما تجذب جسيما خارجيا تظهر وكأن جميع مادة قشرتها قد تجمعت في مركزها · ويصح هذا لكل جزء كروي متمركز من كرة

منتظمة صلدة · فالجسيم الكروى المنتظم يجذب اذن جسيما خارجيا وكان كتلة الكرة الكلية متجمعه في المركز · ويصح هذا ايضا للكرة غير المنتظمة مادام توزيع الكتلة متماثلا قطبيا ··

وقد ترك للطالب ان يبرهن على ان قوة الجذب على جسيم واقع داخل قشرة كروية منتظمة تساوى صفرا ·

٦ـ٣) الطاقة الكامنة في مجال الجاذبية · جهد الجاذبية

Potential Energy in a Gravitational Field. Gravitational Potential

برهنا في البند ٤ـ٣ ، من الفصل الرابع، ان قانون التربيع العكسي للقوة يؤدى الى قانون الدرجة الاولى العكسي لدالة الطاقة الكامنة · وسنشتق في هذا الجزء من الفصل العلاقة نفسها بطريقة فيزيائية عميقة ·

لنحسب الشغل اللازم W لتحرك جسيم اختبار كتلته m على طول مسار معلوم في مجال جاذبية جسيم آخر كتلته M ·

سوف نضع الجسيم الذى كتلته M في نقطة اصل محاورنا ، كما هو مبين في الشكل (٦ ـ ٣ أ)·

لما كانت القوة $\vec{F}$ على جسيم الاختبار هي $\vec{F} = -\left(GMm / r^2 \right) \vec{n}$

عندئذ للتغلب على هذه القوة يجب تسليط قوة خارجية $-\vec{F}$ · اذن ، الشغل المنجز dW لتحريك جسيم الاختبار مسافة $\vec{dr}$ هو

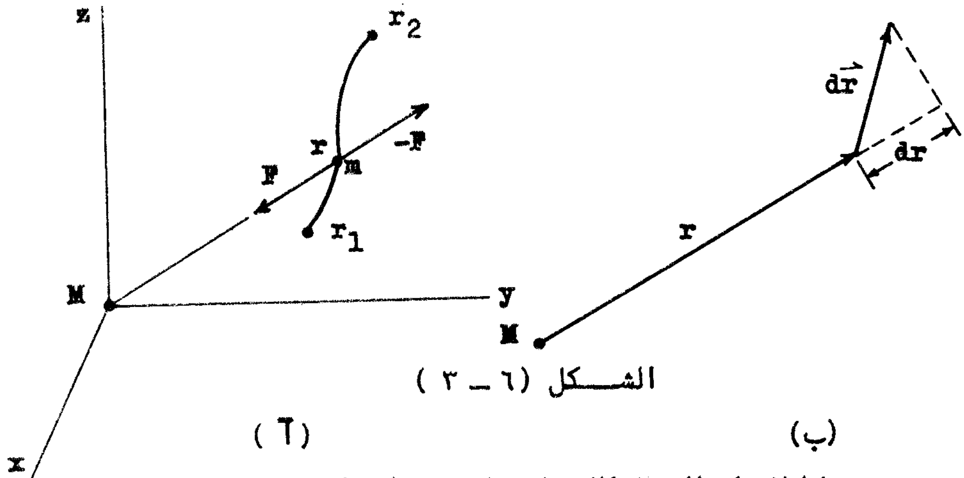
$$dW = -\vec{F}.\vec{dr} = \frac{GMm}{r^2}\,\vec{n}.\vec{dr} \qquad (٦ـ٣)$$

والان يمكننا تحليل $\vec{dr}$ الى مركبتين : $\vec{n}dr$ موازية الى $\vec{n}$ (المركبة القطبية) والاخرى عمودية على $\vec{n}$ [(الشكل · ٦ ـ ٣ (ب)] · من الواضح اذن

$$\vec{n}.\vec{dr} = dr$$

اذن

$$W = GMm \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r^2} = -\,GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad (٦ ـ ٤)$$



الشـــكل (٦ ـ ٣)

(آ) (ب)

مخطط لايجاد الشغل اللازم لتحريك جسيم اختبار من نقطة الى اخرى في مجـــال الجاذبيـــــــــة .

حيث r_1 , r_2 يمثلان المسافتين القطبيتين للجسيم في بداية المسار ونهايتـه علـى التتالي • اذن لايعتمد الشغل على المسار الذى يتبعـه الجسيم، وانما يعتمد فقـط على نقطتي البداية والنهاية للمسار • وهذا يؤكد صحة حقيقة سبق معرفتها وهي ان قانون التربيع العكسي للقوة محافظ •

ويمكننـا تعريف الطاقة الكامنة لجسيم ذى كتلة في نقطة معينة واقعة في مجـــال جاذبية جسيم آخر بالشغل المنجز لتحريك جسيم الاختبار من موضع (اختيارى) يتخـذ كمرجع الى النقطة المعينة في السؤال • من الملائم اتخاذ موضع المرجع في اللانهايـــة •

عند تعويض $r_1 = \infty$, $r_2 = r$ في المعادلة (٦ـ٤)، نحصل علـى

$$V(r) = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r} \qquad (٦\_٥)$$

في الحقيقة رأينا في البند (٤ـ٣) السابق ان دالة الطاقة الكامنة $V(r) = -\frac{k}{r}$ تعطي قانون التربيع العكسي للقوة $\vec{F} = -(\frac{k}{r^2})\vec{n}$. (من المهم ملاحظة انه ليس من المنطق تعريف طاقة كامنة بالتكامل $\vec{F}.d\vec{r}$ مالم نعرف مسبقا ان القوة $\vec{F}$ محافظة ، اى ان دالة الجهد متواجدة) .

ومن المستحسن ، في الغالب ، تعريف كمية مثل Φ ، تسمى بجهد الجاذبية ، بطاقة جهد الجاذبية لوحدة الكتلة ، اى $\Phi = \frac{V}{m}$

اذن جهد الجاذبية في مجال جسيم كتلته M هو ـ

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{٦ـ٦}$$

اذا كان لدينا عدد من الجسيمات مثل M_1 ، M_2 ، $M_i \ldots$ وكانت مواضعها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، ..... ، $\vec{r}_i$ ، ..... ، فان جهد الجاذبية في النقطة (x, y, z) يساوى مجموع جهود الجاذبية لجميع الجسيمات ، اى

$$\Phi(x,y,z) = \sum \Phi_i = -G \sum \frac{M_i}{u_i} \tag{٦ـ٧}$$

حيث u_i تمثل المسافة من الجسيم i الذى كتلته M_i الى نقطة المجال $\vec{r}$ (x, y, z) ، اى

$$u_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$$

تسمى النسبة بين قوة الجذب على جسيم معلوم الى كتلته بشدة مجال الجاذبية . ويرمز لها بالحرف g .

اى

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

والعلاقة بين شدة المجال والجهد هي نفسها بين القوة $\vec{F}$ والطاقة الكامنة V ، اى

$$\vec{g} = - \nabla \Phi$$

$$\vec{F} = - \nabla V \qquad (٦ــ ٨)$$

اذن مركبات شدة المجال تساوى تفاضلات الجهد الجزئيه على التتالي وباشارة سالبة اى ـــ

$$g_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad g_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad g_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (٦ــ ٩)$$

يمكن حساب شدة مجال الجاذبية اولا بايجاد دالة الجهد من المعادلة (٦ــ٧) ثم حساب المنحدر كما هو مبين في المعادلات (٦ــ ٨) او (٦ــ٩) ٠ وهذه الطريقة اسهل ، اعتياديا ، من طريقة حساب المجال رأسا من قانون التربيع العكسي ٠ وسبب ذلك هو ان الجهد جمع عددى بينما المجال جمع اتجاهي ٠ وتشابه هذه الحالة تماما نظرية المجالات الكهرومغناطيسية ٠ وفي الحقيقة يمكن تطبيق اى من نتائج الالكتروستاتيك المناظرة لايجاد مجالات وجهد الجاذبية شريطة ان لاتوجد كتل سالبة ٠

جهد قشرة كروية منتظمة

لنجد ، مثلا ، دالة جهد قشرة كروية منتظمة باستعمال نفس الرموز المبينة في الشكل (٦ــ٣) ، عندنا ـــ

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{u} = - G \int \frac{2\pi \rho R^2 \sin \theta \, d\theta}{u}$$

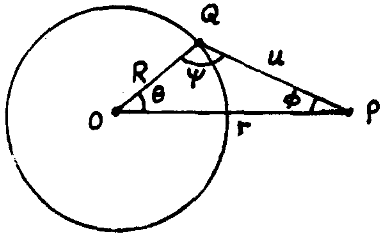
من نفس العلاقة بين u و θ التي استعملناها سابقا ، نجد ان المعادلة المذكورة اعلاه يمكن تبسيطها الى

$$\Phi = -G \frac{2\pi \rho R^2}{rR} \int_{r-R}^{r+R} du = - \frac{GM}{r} \qquad (٦ــ١٠)$$

حيث M هي كتلة القشرة ٠ هذه هي نفس دالة الجهد لجسيم منفرد كتلته M ، موضوع في النقطة O ٠ اذن مجال الجاذبية خارج القشرة هو نفس ذلك المجال المتولد فيما لو تجمعت الكتلة الكلية في المركز ٠ وقد ترك للطالب ان يبرهن بعد اجراء التغيير الملائم على التكامل وغاياته ، ان الجهد داخل القشرة ثابت لذلك يكون المجال هنا صفرا ٠

* جهـد ومجـال حلقـة رفيعـه

نود الان ايجاد دالـة الجهد وشدة مجال الجاذبية في مستوى حلقـة دائريـة رفيعـه • لنفرض أن نصف قطر الحلقة يساوى R وكتلتها M • عندئذ لنقطة خارجية واقعة في مستوى الحلقة ، الشكل (٦ـ٤) نجد ان



الشكل ٦ـ ٤ • الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لحلقة •

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{u} = -G \int_0^{2\pi} \frac{\mu R \, d\theta}{u}$$

حيث μ تمثل الكثافة الخطية للحلقة • لحساب التكامل ، سنعبر عنـه بدلالة الزاويـة ψ المبينة في الشكل ، فمن المثلث OPQ نجد ان

$$R \sin \psi = r \sin \phi$$

وبتفاضلها نحصل على

$$R \cos \psi \, d\psi = r \cos \phi \, d\phi = r \cos \phi \, (-d\theta - d\psi)$$

تنتـج الخطـوة الاخيرة من حقيقـة كون $\theta + \phi + \psi = \pi$

وعند نقل الحدود واستعمال العلاقة $u = R \cos \psi + r \cos \phi$

نحصل على ــ

$$u \, d\psi = -r \cos \phi \, d\theta = -(r^2 - R^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} \, d\theta$$

اذن التكامل المذكور اعلاه يصبح

$$\Phi = -G \mu R 4 \int_0^{\pi/2} (r^2 - R^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} \, d\psi \doteq -G \frac{4\mu R}{r} K\left(\frac{R}{r}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٦ـ١١)$$

حيث K يمثل التكامل الاهليلجي التام Complete elliptic integral

كما عرف في البند (٤ ــ١٠) • عند فك التكامل كمتسلسلة وتكاملها حدا بعد حد نحصل علـــــى

$$\Phi = -G \frac{4\mu R}{r}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi R^2}{8r^2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= -\frac{GM}{r}\left(1 + R^2/4r^2 + \ldots\ldots\right) \qquad (٦ ــ ١٢)$$

عندئذ شدة المجال على مسافة r من مركز الحلقة • تكون بالاتجاه القطبي (لان Φ ليست دالــة للزاويــة θ) • وهي تعطى بالمعادلة التالية

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{n} = \left(-\frac{GM}{r^2} - \frac{3GMR^2}{4r^4} - \ldots\right)\vec{n} \qquad (٦ــ١٣)$$

فالمجال اذن لايخضع لقانون التربيع العكسي • اما اذا كانت r كبيرة جدا بالنســبة الى R فالحد الاول يكون هو الغالب ويصبح المجال تقريبا •من نوع التربيع العكســي •

(٦ــ٤) الطاقة الكامنة في مجال مركزى عام

Potential Energy in a General Central Field.

رأينا سابقا ان المجال المركزى من نوع التربيع العكسي يكون محافظا • ولنفرض الان السؤال التالي :

" هل اى مجال مركزى لقوة يكون محافظا ؟ يمكن كتابة المجال المركزى المتجانــس العام كما يلي ــ

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{n} = \frac{f(r)}{r}\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z\right) \qquad (٦ــ١٤)$$

حيث $\vec{n} = (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)/r$ تمثل الوحدة المتجهة القطبية • ولكي نطبق اختبار المحافظة • لنحسب دوران $\vec{F}$. اى

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

حيث

$$f_x=f(r)\frac{x}{r} \ , \ f_y=f(r)\frac{y}{r} \ , \ f_z=f(r)\frac{z}{r}$$

ثم نحسب التفاضل الجزئي على النحو التالي

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r}$$

وبالتماثـــل

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \ , \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

من الواضح ، عندئذ

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right) = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

وهناك معادلات مماثلـة للزوجين f_z ، f_x و f_z ، f_y . وباســتعمال النتيجـة السابقـة ، نستطيع ان نجد بسهولة ان الدوران يساوى صفرا ولذلك يكـــون مجال القـوة المركزية المذكور اعلاه محافظا . اذن يمكننا تعريف دالـة الطاقـة الكامنـة كما في البند (٦ـ٣) ، على النحو التالي

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} f(r)\ dr \qquad (٦ـ١٥)$$

وهذا يجيز لنا حساب دالـة الطاقـة الكامنـة ، اذا كانت دالـة القـوة معلومـــة . وبالعكس اذا كنا نعرف دالـة الطاقـة الكامنـة ، فمن

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \qquad (٦ـ١٦)$$

نحصل على دالـة القـوة للمجال المركزى .

٦- ، الزخم الزاوي — Angular Momentum

افرض المعادلة العامة لحركة جسيم

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

لنضرب طرفي المعادلة اتجاهيا بالمتجه $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

من التعريف ، الطرف الايسر لهذه المعادلة ، يمثل عزم القوة حول نقطة الاصل ٠ والطرف الايمن عبارة عن مشتقة زمن الكمية $\vec{r} \times m\vec{v}$ ٠ ولكي نثبت ذلك ، عندنا

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

تنجت الخطوة الاخيرة لان $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$. والكمية

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} \qquad (٦-١٢)$$

تسمى بزخم الجسيم الزاوي ٠ لذلك يمكننا كتابة

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (٦-١٨)$$

اي ان العزم حول نقطة اصل معلومة لقوة تؤثر على جسيم تساوي تغير زمن الزخم الزاوي حول هذه النقطة ٠

الزخم الزاوي في المجالات المركزية
Angular Momentum in Central Fields

لنطبق القاعدة العامة المذكورة اعلاه على حالة خاصة وهي حركة جسيم في مجال مركزي ٠ هنا ، القوة $\vec{F}$ تؤثر باتجاه متجه نصف القطر $\vec{r}$ ٠ اي ان الضرب الاتجاهي $\vec{r} \times \vec{F}$ يساوي صفرا ، وهذا يعني ، ان العزم يساوي صفرا ، لذلك لاي مجال مركزي يكون —

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

اذن

$$L = \text{constant}$$

اى ان الزخم الزاوى لجسيم يتحرك في مجال مركزى يبقى دائما ثابتا ٠

نستنتج من ذلك ، ان مسار حركة الجسيم في مجال مركزى يبقى في مستو واحد ، لان متجه الزخم الزاوى الثابت $\vec{L}$ يكون عموديا على كل من $\vec{r}$, $\vec{v}$ ، اذن يكون عموديا على المستوى الذى يتحرك فيه الجسيم ٠

مقدار الزخم الزاوى Magnitude of the Angular Momentum

لحساب مقدار الزخم الزاوى ، يفضل تحليل متجه السرعة $\vec{v}$ الى مركبتيه القطبية والمستعرضة في المحاور القطبية ٠ وبذلك يمكن كتابة

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}'$$

حيث $\vec{n}$ تمثل الوحدة المتجهة القطبية و $\vec{n}'$ الوحدة المتجهة المستعرضة ٠ عندئذ مقدار الزخم الزاوى يكون

$$L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = |r\vec{n} \times m(\dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}')|$$

ولما كان $\vec{n} \times \vec{n} = 0$ و $\vec{n} \times \vec{n}' = 1$ اذن

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

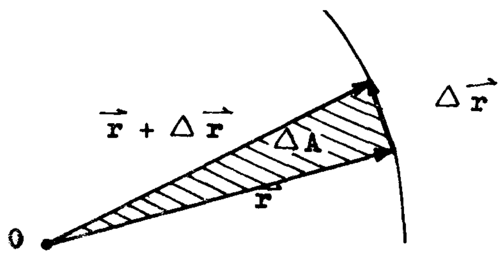
لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية ٠

٦ـ ٦) قانون المساحات ٠ قوانين كهلر لحركة الكواكب السيارة

The Law of Areas. Kepler's Laws of Planetary Motion.

يرتبط الزخم الزاوى لجسيم بالمعدل الزمني للمساحة التي يقطعها متجه الموضع ٠ لتوضيح ذلك ، افرض الشكل (٦ـ ٥) الذى يبين متجهي موضع متتاليين $\vec{r}$ ، $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ يمثلان حركة جسيم في فترة زمنية مقدارها Δt ٠ مساحة المثلث المظلل ΔA الواقعة بين المتجهين هي

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$



الشكل (٦ـ٥) المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر

وعند قسمة طرفي هذه المعادلة على Δt واخذ الغاية تحصل على ـ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| \qquad (٦ـ٢٠)$$

ومن تعريف $\vec{L}$ يمكننا كتابة هذه المعادلة على النحو التالي

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = \frac{\vec{L}}{2m} \qquad (٦ـ٢١)$$

للمعدل الزمني الذى يمسح فيه متجه نصف القطر مساحة . ولما كان الزخم الزاوى $\vec{L}$ ثابتا في اى مجال مركزى ، نستنتج من ذلك ان السرعة المساحية dA/dt تكون ثابتة ايضا في المجال المركزى

قوانين كبلـر Kepler's Laws

اكتشف يوهانزكبلر Johannes Kepler سنة ١٦٠٩ بطريقة التجربة ان الكواكب عندما تدور حول الشمس تكون سرعاتها المساحية ثابتة . لقد استنتج كبلر هذا القانون واثنين آخرين . بعد ان قام تيشوبرا Tycho Brahe بدراسة مضنية لمواضع الكواكب وتسجيلها . وقوانين كبلر الثلاثة هي ـ

١ـ كل كوكب يتحرك بمسار قطع ناقص تكون الشمس في بؤرته .

٢ـ يقطع متجه نصف القطر مساحات متساوية في ازمان متساوية .

٣ـ يتناسب مربع زمن الدورة حول الشمس مع مكعب طول المحور الرئيسي للمسـار

وقد وضح نيوتن ان قوانين كبلر الثلاثة هي نتائج لقانون الجاذبية ٠ ومن المناقشة التي تقودنا الى معادلة (٦ــ ٢١) ، نرى ان القانون الثاني قد نتج من حقيقة كون مجال جاذبية الشمس مركزيا ٠ اما القانونان الاخران ــ كما سنبين بعدئذ ، فهمـا نتيجتان لحقيقة كون القوة تتغير مع مربع المسافة العكسي ٠

٦ــ٧) مدار جسيم في مجال قوة مركزيه

Orbit of a Particle in a Central-Force Field

لدراسة حركة جسيم في مجال مركزى ، من الملائم التعبير عن المعادلة التفاضليـة للحركـة

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\,\vec{n}$$

بالاحداثيات القطبية ٠ وكما بينا في البند (٢ــ٩) ، ان مركبة $\ddot{\vec{r}}$ القطبية هي $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ والمستعرضة هي $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$. وعنـد التعويض نحصل على مركبات المعادلات التفاضلية للحركـة وهي

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \tag{٦ــ٢٢}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \tag{٦ــ٢٣}$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

أو

$$r^2\dot{\theta} = \text{constant} = h \tag{٦ــ٢٤}$$

ومن معادلة (٦ــ ١٩) نرى ان

$$h = \frac{L}{m} \tag{٦ــ٢٥}$$

اذن h يمثل الزخم الزاوى لوحدة الكتلة ٠ ان ثبوته يعني ببساطة صياغة الحقيقـة المعروفة مرة ثانية ، وهي ان الزخم الزاوى لجسيم يكون ثابتا عندما يتحرك تحت تأثيـر قـوة مركزيـه ٠

ويمكننا نظريا حل المعادلتين التفاضليتين [المعادلتان (٦ــ٢٢) و (٦ــ٢٤)] لدالـة

قطبيــة معلومة ($f(r)$) للحصول على r و θ كدوال للزمن t . وفي أغلــب الحالات يهمنا نقط المسار في الفضاء (المدار) بغض النظر عن الزمن t . فلايجاد معادلة المدار سنستخدم المتغير u المعرّف كما يلي –

$$r = \frac{1}{u} \qquad (٦ ــ ٢٦)$$

اذن

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \qquad (٦ ــ ٢٧)$$

حيث نتجت الخطوة الاخيرة من

$$\dot{\theta} = hu^2 \qquad (٦ ــ ٢٨)$$

وفقا للمعادلتين (٦ ــ ٢٤) و (٦ ــ ٢٦) .

وعند التفاضل للمرة الثانية ، نحصل على

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (٦ ــ ٢٩)$$

من قيم $\ddot{r}, \dot{\theta}, r$ نجد بسهولة ان المعادلة (٦ ــ ٢٢) تتحول الــى

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2u^2}f(u^{-1}) \qquad (٦ ــ ٣٠)$$

المعادلة المذكورة اعلاه هي معادلة المدار التفاضلية لجسيم يتحرك تحت تأثير قــوة مركزيــه . والحل يعطي u (اذن r) كدالة للمتغير θ . وبالعكس . اذا كانت المعادلة القطبية للمدار معلومة . اي $r = r(\theta) = u^{-1}$ ، عندئذ يمكن ايجاد دالة القــوة بتفاضلها للحصول على $d^2u/d\theta^2$ وتعويضها في المعادلة التفاضليــة .

امثلـــة

١ ــ جسيم في مجال مركزي يتحرك بمدار لولبــي

$$r = c\theta^2$$

جد شكل دالـة القــوة ٠

عند نـــا $$u = \frac{1}{c\theta^2}$$

و

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{c}\,\theta^{-3}\ , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{6}{c}\,\theta^{-4} = 6cu^2$$

عند ئذ ، من المعادلة (٦ــ٣٠)

$$6cu^2 + u = \frac{-1}{mh^2u^2}\,f(u^{-1})$$

اذ ن

$$f(u^{-1}) = -\,mh^2\,(6cu^4 + u^3)$$

و

$$f(r) = -mh^2\left(\frac{6c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right)$$

فالقوة تتكون اذ ن من قانوني التكعيب العكسي والقوة الرابعة العكســـــــــــية ٠

٢ــ في المسألة السابقة جد كيف تتغير الزاوية θ مع الزمن ٠

نستعمل هنا حقيقة كون $h = r^2\dot{\theta}$ ثابتا ٠ اذ ن

$$\dot{\theta} = hu^2 = h\,\frac{1}{c^2\theta^4}$$

أو

$$\theta^4 d\theta = \frac{h}{c^2}\,dt$$

وهكذا ، بالتكامل نجد ان

$$\frac{\theta^5}{5} = hc^{-2}t$$

حيث فرض ان ثابت التكامل يساوي صفرا ٠ عند ئذ

$$\theta = Ct^{1/5}$$

حيــث

$$C = \text{constant} = (5hc^{-2})^{1/5}$$

٦ــ ٨) معادلة الطاقة للمدار Energy Equation of the Orbit

ان مربع الانطلاق بالمحاور القطبية هو

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

لما كانت القوة المركزية محافظة ، فالطاقة الكلية $T + V$ ثابتة ، وهي تساوى

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{constant} \qquad (٦ــ ٣١)$$

ويمكننا كذلك كتابة المعادلة السابقة بدلالة المتغير $u = \frac{1}{r}$ • ومن المعادلتين (٦ــ ٢٧) و (٦ــ ٢٨) نحصل على

$$\tfrac{1}{2}mh^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) = E \qquad (٦ــ٣٢)$$

وفي المعادلة السابقة هناك متغيران فقط هما u , θ • وسنسمي هذه المعادلة اذن بمعادلة الطاقة للمدار •

مثال

من المثال ، في البند السابق ، حصلنا للمدار اللولبي $r = c\theta^2$ على

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-2}{c}\,\theta^{-3} = -2c^{\frac{1}{2}}u^{3/2}$$

فمعادلة الطاقة للمدار تكون اذن

$$\tfrac{1}{2}mh^2 \,(4cu^3 + u^2) + V = E$$

او

$$V(r) = E - \tfrac{1}{2}\, mh^2 \left(\frac{4c}{r^3} + \frac{1}{r^2}\right)$$

وهذه تعطي دالة القوة بسهولة لان

$$f(r) = -dV/dr$$

٦ــ ٩) المدارات في مجال التربيع العكسي

Orbits in an Inverse-square Field

من اهم انواع المجالات المركزيه هو الذى تتغير فيه القوة عكسيا مع مربع المسافة القطبية

$$f(r) = -k/r^2 \tag{٦ـ ٣٣}$$

لما كنا قد ادخلنا الاشارة السالبة في المعادلة السابقة فثابت التناسب k يكون موجبا لقوة التجاذب والعكس بالعكس . (كما رأينا في البند (٦ـ٢) $k=GMm$ لمجال الجاذبية) . عندئذ تصبح معادلة المدار [المعادلة (٦ ـ ٢٠)].

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2} \tag{٦ـ ٣٤}$$

ومن الواضح ان الحل العام هو

$$u = A\cos(\theta - \theta_o) + \frac{k}{mh^2} \tag{٦ـ ٣٥}$$

او

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_o) + k/mh^2} \tag{٦ ـ ٣٦}$$

وتحسب ثوابت التكامل A ، θ_o من الشروط الابتدائية . واما كانت قيمة θ_o تعين ميلا ن المدار ليس غيره لذلك يمكننا بدون فقدان عمومية المعادلة اختيار $\theta_o = 0$ عند بحث شكل المداره اى ـ

$$r = \frac{1}{A\cos\theta + k/mh^2} \tag{٦ ـ ٣٧}$$

وهذه هي معادلة المدار القطبية . وهي معادلة قطع مخروطي (قطع ناقص ، مكافي ، او زائد) مع نقطة الاصل في البوءرة . ويمكن كتابة المعادلة بشكل قياسي على النحو التالي

$$r = r_o\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \tag{٦ ـ ٣٨}$$

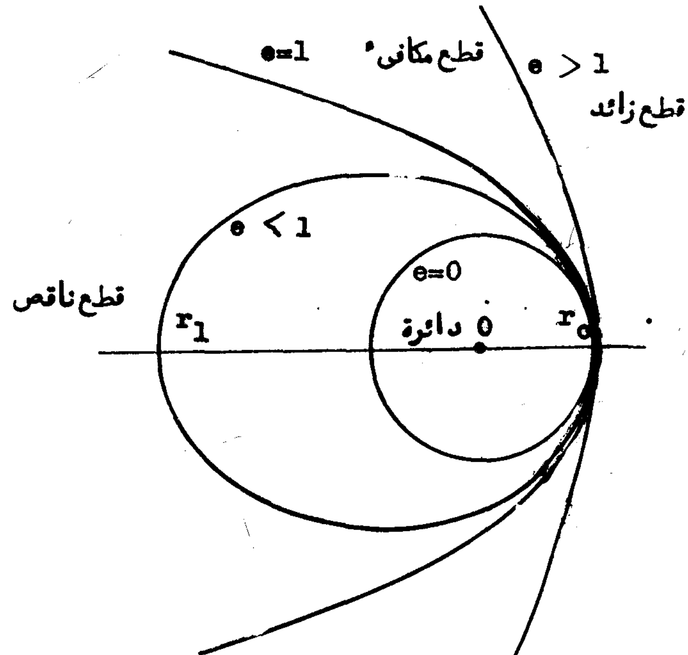
حيث

$$e = \frac{A\,mh^2}{k} \tag{٦ ـ ٣٩}$$

و

$$r_o = \frac{mh^2}{k(1 + e)} \qquad (٦ـ ٤٠)$$

الثابت e يسمى باختلاف المركز eccentricity · والشكل (٦ـ ٦) يوضح الحالات المختلفة وهي



الشكل (٦ـ ٦)

عائلة مقاطع المخروط المركزية

قطع ناقص : $1 > e$ دائرة (حالة خاصة من القطع الناقص) : $e = 0$

قطع مكافئ : $e = 1$ قطع زائد : $e > 1$

من المعادلة "(٦ـ ٣٨) r_o هي قيمة r عندما $\theta = 0$ · وقيمة r عندما $\theta = \pi$ هي

$$r_1 = r_o \frac{1 + e}{1 - e} \qquad (٦ـ ٤١)$$

وبالنسبة الى المدارات الاهليجيه للكواكب حول الشمس ، تسمى المسافة r_0 بالحضيض الشمسي Perihelion (اقرب مسافة الى الشمس) ، والمسافة r_1 تسمى بالاوج aphelion (ابعد مسافة من الشمس) . اما المسافات المماثلة لها لمدار القمر حول الارض ، ولمدارات توابع الارض الصناعية ، فتسمى مسافات الحضيض القمري Perigee والاوج apogee على التتالي .

ان الاختلافات المركزية لمدارات الكواكب حول الشمس صغيرة جدا (انظر جدول "٦ـ١" ادناه) . على سبيل المثال ، في حالة مدار الارض $e = 0.017$ ، $r_0 = 91,000,000$ miles ، $r_1=95,000,000$ miles. ومن ناحية اخرى ، فان المذنبات بصورة عامة لها اختلافات مركزية كبيرة (مدارات كبيرة الاستطالة) . فمثلا الاختلاف المركزى لمذنب هالي يساوى ٠.٩٦٧ ومسافة حضيضه ٥٥٠٠٠٠٠٠ ميل ، بينما اوجه خلف مدار نبتون . ولمذنبات كثيرة (النوع غير الدائر) مدارات قطع مكافىء او زائد .

ايجاد الحركات المدارية من الشروط الابتدائية

رأينا من المعادلة (٦ـ٤٠) ان اختلاف المركز يمكن التعبير عنه كما يلي ـ

$$e = \frac{mh^2}{kr_0} - 1 \qquad (٦ـ٤٢)$$

لنفرض ان v_0 تمثل انطلاق الجسيم عندما تكون $\theta=0$ ، عندئذ ، من تعريف الثابت h المعادلة (٦ـ٢٤) ، عندنا

$$h = r^2\dot{\theta} = r_0^2\,\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \qquad (٦ـ٤٣)$$

فاختلاف المركز عندئذ يكون

$$e = \frac{mr_0 v_0^2}{k} - 1 \qquad (٦ـ٤٤)$$

للمدار الدائرى ($e = 0$) عندئذ نحصل على $k= mr_0v_0^2$ او

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0} \qquad (٦ـ٤٥)$$

ولنرمز الان للكمية k/mr_0 بالرمز v_c^2 بحيث ، اذا كانت $v_0=v_c$

يكون المدار دائريا • عندئذ يمكن كتابة علاقة اختلاف المركز في المعادلة (٦ـ ٤٤) • كما يلي ـ

$$e = \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 - 1 \qquad (٦ـ ٤٦)$$

ويمكن كتابة معادلة المدار على النحو التالي

$$r = r_o \frac{(v_o/v_c)^2}{1 + \left[(v_o/v_c)^2 - 1\right] \cos \theta} \qquad (٦ـ ٤٧)$$

ونحصل على قيمة r_1 عندما تكون $\theta = \pi$ • اذن

$$r_1 = r_o \frac{(v_o/v_c)^2}{2 - (v_o/v_c)^2} \qquad (٦ـ ٤٨)$$

مثـــال

تابع صاروخي يدور حول الارض بمدار دائري نصف قطره r_o • وقد سبب انفجار محرك الصاروخ المفاجيء زيادة انطلاقـه بنسبة عشرة بالمائة • جد معادلة المدار الجديد واحسب مسافة نقطـة الاوج •

لنفرض ان v_c تمثل الانطلاق في المدار الدائرى • و v_o الانطـــلاق الابتدائي الجديد • اى ان

$$v_o = 1.1\ v_c$$

عندئذ تصبح المعادلة (٦ـ ٤٧) للمدار الجديد •

$$r = r_o \frac{1.21}{1 + 0.21 \cos \theta}$$

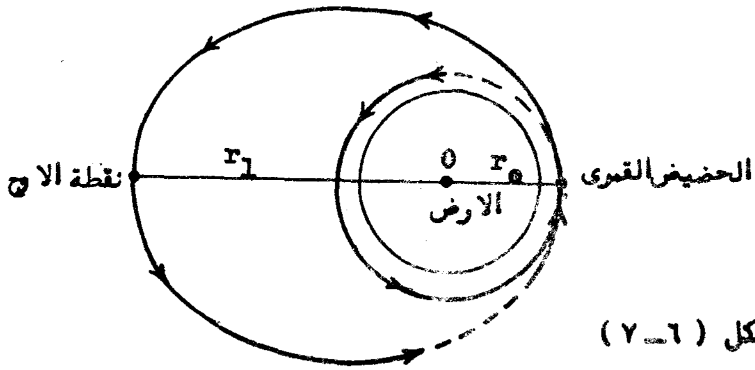
ومسافة نقطة الاوج من المعادلة (٦ـ ٤٨) هي

$$r_1 = r_o \frac{1.21}{2 - 1.21} = 1.53\ r_o$$

وقد بينت المدارات في الشكل (٦ـ ٧) •

٦ـ ١٠) الطاقات المدارية في مجال التربيع العكسي

Orbital Energies in the Inverse-square Field



الشكل (٦ ـ ٧)
يغير الصاروخ الفضائي مداره
من دائرة الى قطع ناقص .

لما كانت دالة الطاقة الكامنة $V(r)$ لمجال قوة التربيع العكسية هي

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$$

عندئذ نحصل من المعادلة (٦ ـ ٣٢) على معادلة الطاقة للمدار وهي ـ

$$\tfrac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - ku = E \qquad (٦ ـ ٤٩)$$

وعند فرز المتغيرات ، نحصل على

$$d\theta = \left(\frac{2E}{mh^2} + \frac{2ku}{mh^2} - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du \qquad (٦ ـ ٥٠)$$

وعند التكامل ، نجد ان

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{mh^2u - k}{(k^2 + 2Emh^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \theta_0$$

حيث θ_0 تمثل ثابت التكامل . فاذا فرضنا ان $\theta_0 = -\pi/2$ وحلت للمتغير u ،
نحصل على

$$u = \frac{k}{mh^2}\left[1 + (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right]$$

او

$$r = \frac{mh^2k^{-1}}{1 + (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}\cos\theta} \qquad (٦ ـ ٥١)$$

هذه هي معادلة المدار القطبية ٠ وعند مقارنتها بالمعادلتيـــــن (٦ ـ ٣٨) و (٦ـ ٣٩) نرى ان الاختلاف المركزى هو

$$e = (1 + 2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ ٥٢)$$

العلاقة المذكورة اعلاه للاختلاف المركزى تجيز لنا تصنيف المدارات وفقا للطاقـــة الكلية E كما يلي ـ

مدارات مغلقة (قطع ناقص او دائرة) :	$e < 1$	$E < 0$
قطــع مكافــيء :	$e = 1$	$E = 0$
قطـــع زائـــد :	$e > 1$	$E > 0$

لما كانت $E = T+V$ وكذلك ثابتة ، فالمدارات المغلقة هي التي تكون فيهـــا $T < |V|$ ، والمدارات المفتوحة هي التي تكون فيها $T \geqslant |V|$

مثـــال

لوحظ ان انطلاق نجم مذنب يساوى v_0 عندما يكون على مسافة r_0 من الشمس ، واتجاه حركتـــه يصنع زاوية ϕ مع متجـــه نصف القطر من الشمس ٠ جد الاختـــلاف المركزى لمدار النجم المذنب ٠

في مجال جاذبية الشمس $k = GMm$ حيث M تمثل كتلة الشمس و m كتلة الجسم ٠ الطاقة الكلية E ، عندئذ تعطى من

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \text{constant}$$

وسيكون المدار قطعا ناقصا ، مكافئا او زائدا حسبما تكون E سالبة ، صفر او موجبة ، ووفقا لذلك اذا كانت (v_0^2) اقل من ، تساوى او اكبر مــــن $\frac{2GM}{r_0}$ فسيكون المدار قطعا ناقصا ، مكافئا او زائدا على التتالي ٠ الآن ٠

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = r_o v_o \sin \phi$$

اذن تكون قيمة الاختلاف المركزى e, من المعادلة (٦ـ ٥٢) هـــــي

$$e = \left[1 + \left(v_o^2 - \frac{2GM}{r_e}\right) \frac{r_o^2\, v_o^2 \sin^2 \phi}{G^2 M^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

وقد يعبر عن حاصل الضرب GM بدلالة انطلاق الارض v_e ونصف قطرهـــا المدارى r_e (على فرض ان المدار دائرى) ، اى

$$GM = r_e v_e^{\,2}$$

وعندئذ يمكن كتابة المعادلة التي تعبر عن الاختلاف المركزى على النحو التالي ـ

$$e = \left[1 + \left(\frac{v_o^{\,2}}{v_e^2} - \frac{2r_e}{r_o}\right) \frac{r_o^2\, v_o^2}{r_e^2\, v_e^2} \sin^2 \phi\right]^{\frac{1}{2}}$$

غايات الحركة نصف القطرية

من معادلة المدار النصف قطريه (٦ـ ٥١) ، نرى ان قيم r عندما $\theta = 0$ هي r_o ،وعندما $\theta = \pi$ هي r_1 ،اى ان

$$r_o = \frac{mh^2k^{-1}}{1 + (1+2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٥٣)$$

$$r_1 = \frac{mh^2k^{-1}}{1 - (1+2Emh^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٥٤)$$

في حالة المدار الاهليلجي تكون E سالبة والقطر الرئيسي $2a$ للقطـــع هـــو

$$2a = r_o + r_1$$

عندئذ نجد ، من المعادلتين (٦ـ ٥٣) و (٦ـ ٥٤) ، ان

$$2a = -\frac{k}{|E|} \qquad (٦ـ ٥٥)$$

اذن ، قيمة a تحسب كليا من الطاقة الكلية ·
وفي حالة المدار الدائري الذى نصف قطره a عندئذ

$$V = -\frac{k}{a} = \text{constant}$$

$$E = -\frac{k}{2a} = \text{constant}$$

اذن الطاقة الحركية تكون

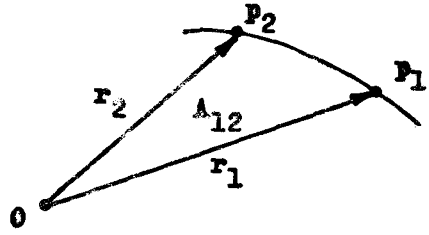
$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = E - V = k/2a$$

ويمكن البرهنة على ان معدل زمن الطاقة الحركية ، للحركة الاهليليجية في مجال التربيع العكسي هي $k/2a$ ايضا ، والمعدل الزمني للطاقة الكامنة هو $-k/a$ حيث a يمثل المحور الرئيسي للقطع الناقص · وقد ترك البرهان كتمرين ·

٦ــ ١١) مدة الدورة للحركة المدارية Periodic Time of Orbital Motion

بينا في البند (٦ــ ٦) ان السرعة المساحية $\dot{A}$ لجسيم يتحرك في اى مجال مركزى تكون ثابتة · اذن ، الزمن اللازم t_{12} ليتحرك جسيم من نقطة مثل P_1 الى اى نقطة اخرى P_2 (الشكل · ٦ــ ٨) نحصل عليه من المعادلتين (٦ ــ ٢١) و (٦ــ ٢٥) وهو

$$t_{12} = \frac{A_{12}}{\dot{A}} = A_{12}\frac{2m}{L} = A_{12}\frac{2}{h}$$



الشكل (٦ــ ٨)
المساحة التي يقطعها
متجه نصف القطر

حيث A_{12} تمثل المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر بين النقطتين p_1 وp_2 .

لنستخدم النتيجة السابقة لحالة مدار قطع ناقص لجسيم في مجال التربيع العكسي .

لما كانت مساحة القطع الناقص هي πab حيث a و b يمثلان نصفي المحور الرئيسي والثانوي، على التتالي ، عندئذ ، الزمن اللازم τ لكي يكمل جسيم مسارا مداريا واحدا هو

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (٦ـ٥٦)$$

ولكن للقطع الناقص

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

حيث e هي الاختلاف المركزي . اذن يمكننا كتابة

$$\tau = \frac{2\pi a^2}{h} \sqrt{1 - e^2}$$

علاوة على ذلك، نجد من المعادلتين (٦ـ٤٠) و (٦ـ ٤١) ، ان المحور الرئيسي هو

$$2a = r_o + r_1 = \frac{mh^2}{k}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{2mh^2}{k(1-e^2)}$$

وبذلك يمكننا التعبير عن زمن الدورة كما يلي

$$\tau = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} a^{3/2} \qquad (٦ـ٥٧)$$

اذن، زمن الدورة لمجال قوة تربيع عكسية معينة يعتمد فقط على طول المحور الرئيسي لمدار القطع الناقص .

ولما كان $k = GMm$ لجرم كتلته m يتحرك في مجال جاذبية الشمس ، يمكننا كتابة زمن دورة حركة الجرم المدارية كما يلي ـ

$$\tau = ca^{3/2} \qquad (٦ـ ٥٨)$$

حيث $c = 2\pi (GM)^{-\frac{1}{2}}$. من الواضح ان c هي نفسها لجميع الاجرام . والمعادلة (٦ـ ٥٨) تمثل الصيغة الرياضية لقانون كبلر الثالث . (البند ٦ـ ٦) .

اذا استعملت الوحدات الفلكية لقياس a (٩٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ميل = a_{earth} =١

وحدة فلكية) وقيست T بالسنين ، عندئذ تكون قيمة c العددية واحدا · وقد سطرت في الجدول (٦ــ ١) ازمان الدورات والمحاور نصف الرئيسية بالوحدات الفلكية وكذلك الاختلافات المركزية لمدارات الاجرام في المجموعة الشمسية ·

الجدول (٦ــ ١)

الجرم		المحاور نصف الرئيسية بالوحدات الفلكية	زمن الدورة بالسنوات	الاختلاف المركزي
عطارد	Mercury	٠ر٣٨٧	٠ر٢٤١	٠ر٢٠٦
الزهره	Venus	٠ر٧٢٣	٠ر٦١٥	٠ر٠٠٧
الارض	Earth	١ر٠٠٠	١ر٠٠٠	٠ر٠١٧
المريخ	Mars	١ر٥٢٤	١ر٨٨١	٠ر٠٩٣
المشتري	Jupiter	٥ر٢٠٣	١١ر٨٦	٠ر٠٤٨
زحل	Saturn	٩ر٥٣٩	٢٩ر٤٦	٠ر٠٥٦
اورانوس	Uranus	١٩ر١٩	٨٤ر٠٢	٠ر٠٤٧
نبتون	Neptune	٣٠ر٠٦	١٦٤ر٨	٠ر٠٠٩
بلوتو	Pluto	٣٩ر٤٦	٢٤٧ر٧	٠ر٢٤٩

٦ــ ١٢) الحركة في مجال التربيع العكسي التنافري ــ تشتت الجسيمات الذريه

Motion in an Inverse-square Repulsive Field.
Scattering of Atomic Particles

هناك تطبيق فيزيائي مهم يتضمن حركة جسيم في مجال مركزي، قانون القوة فيه من نوع التربيع العكسي التنافري، كانحراف الجسيمات الذرية العالية الانطلاق (البروتونات جسيمات الفا وهلم جرا) بتأثير نويات الذرات الموجبة الشحنة · ان الابحاث الاساسية التي لها الاولوية في معلوماتنا الحالية للتركيب الذرى والنووى هي تجارب التشتت ،

وكان اول من بدأها الفيزيائي البريطاني اللورد ردرفورد في بداية القـــرن الحالـــي ٠

افرض ان جسيما شحنتــه q وكتلتــه m (الجسيم الساقط بانطلاق عال) يمر بالقرب من جسيم ثقيل شحنته Q (النواة — فرضت ثابتة) ٠ والجسيم الساقط تؤثر عليــه قـــوة تنافريه تعطى من قانون كولوم ، أى

$$f(r) = \frac{Qq}{r^2}$$

حيث فرض موضع Q في نقطة الاصل (سنستعمل الوحدات الالكتروستاتيكية cgs ، للشحنات q,Q . عندئذ تكون r مقاسة بالسنتمترات والقوة بالداينات) ، عندئـــذ تصبح المعادلة التفاضلية للمدار (٦—٣٠) كما يلي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Qq}{mh^2} \qquad (٦—٥٩)$$

اذن معادلة المدار تكون

$$u^{-1} = r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) - Qq/mh^2} \qquad (٦—٦٠)$$

ويمكننا كذلك كتابة معادلة المدار بالشكل الذى تعطيه المعادلة (٦— ٥١) ، أى

$$r = \frac{mh^2 Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1+2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos(\theta-\theta_0)} \qquad (٦—٦١)$$

زائد

لان $k= -Qq$. المدار قطع ~~مكافئ~~ ٠ ويمكن روءية ذلك من الحقيقة الفيزيائيــة وهـــي ان الطاقة E تكون دائما اكبر من الصفر في مجال قوة تنافرية ٠ (في الحالة التي عند نـــا $E= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Qq}{r}$) اذن ، في المعادلة (٦— ٦١) ، الاختلاف المركـــزى e وهو معامل ($\theta - \theta_0$) $\cos$ يكون اكبر من واحد ٠ وهذا يعني ان المدار يجـــب ان يكون قطعا ~~مكافئا~~ زائدا

يقترب الجسيم الساقط على طول احد خطوط المقاربـــة asymptote ويبتعد على طول الآخر كما هو مبين في الشكل (٦— ٩) ٠ وقد اخترنا اتجاه المحور القطبـــي بحيث

يكون موضع الجسيم الابتدائي في $\theta=0$, $r=\propto$. وواضح ان r في اى مـــن معادلتي المدار تاخذ قيمة النهاية الصغرى عندما تكون $\cos(\theta - \theta_0)=1$ ، اى عندما $\theta = \theta_0$. ولما كانت $r=\propto$ عندما $\theta = 0$ ، عندئذ r تساوى كذلـــك مالا نهاية عندما $\theta = 2\theta_0$. فالزاوية بين الخطين المتقاربين للقطع المكافيء اذ ن تساوى $2\theta_0$ ، والزاوية ϕ التي ينحرف فيها الجسيم الساقط هي

$$\phi = \pi - 2\theta_0 \qquad (٦\text{ـ}٦٢)$$

علاوة على ذلك، يتلاشى مقام يمين المعادلة (٦ــ ٦١) ، عندمــــا $\theta = 0$ و $\theta = 2\theta_0$. اذن

$$-1 + (1 + 2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0 = 0$$

ومنها نجد بسهولة ان

$$\tan \theta_0 = (2Em)^{\frac{1}{2}} hQ^{-1}q^{-1} = \cot \frac{\phi}{2} \qquad (٦\text{ـ}٦٣)$$

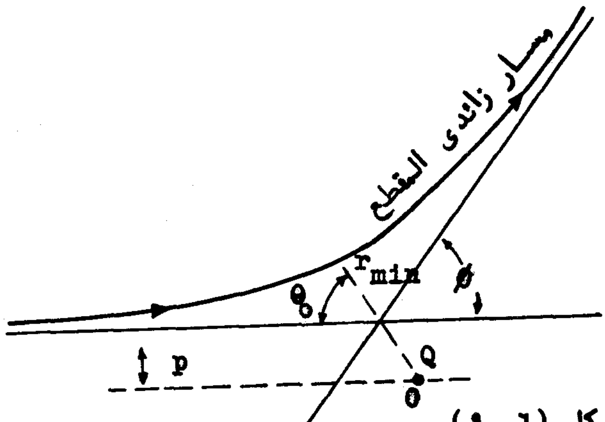
وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦ــ ٦٢) .

عند تطبيق المعادلة السابقة على مسائل التشتت ،فمن المناسب التعبير عن الثابت h بدلالة كمية اخرى p تسمى برمتر التصادم Impact Parameter. وبرمتر التصادم هو المسافة العمودية بين نقطة الاصل (مركز التشتت) والخط الابتدائي لحركة الجســـيم) كما هو مبين في الشكل (٦ــ ٩) . اى ان

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = pv_0 \qquad (٦\text{ـ}٦٤)$$

حيث v_0 تمثل الانطلاق الابتدائي للجسيم. ونعلم ايضا ان الطاقة E ثابتة وتساوى الطاقـــة الحركية الابتدائية $\frac{1}{2}mv_0^2$ ، لان الطاقة الكامنة الابتدائية تســاوى صفـرا ($r = \infty$) . ووفقا لذلك ، يمكننا كتابة علاقة التشتت من المعادلة (٦ ــ ٦٣) على النحو التالي

$$\cot \frac{\phi}{2} = \frac{pmv_0^2}{Qq} = \frac{2pE}{Qq} \qquad (٦\text{ـ}٦٥)$$



الشكل (٦ـ ٩)
مسار زائدى القطع لجسيم مشحون يتحرك في مجال
الترهيع العكسي التنافرى لجسيم مشحون آخـــــر

امثلــــــة

١ـ ينبعث جسيم الفا من الراديوم (E تساوى خمسة ملايين الكترون فولت وتســـاوى $5 \times 10^{6} \times 1.6 \times 10^{-12}$ ارك) وينحرف بزاوية ٩٠ عند مروره بالقــرب مــن نواة الذهب • فما قيمة برمتر التصادم ؟ •

لجسيمات الفا $q = 2e$ وللذهب $Q = 79e$ حيث e تمثل الشحنــة الاوليــة (الشحنة التي يحملها الالكترون تساوى e ـ) • في وحداتنا $e=4.8x10^{-10}esu$ •

اذن ، من المعادلة (٦ـ ٦٥) ، نحصل على

$$p = \frac{Qq}{2E} \cot 45^{o} = \frac{2 \times 79 \times (4.8)^2 + 10^{-20}\ cm}{2 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-6}}$$

$$= 2.1 \times 10^{-12}\ cm$$

٢ـ احسب اقرب مسافة دنو لجسيم الفا في السؤال السابق •

تعطي معادلة المدار (٦ـ ٦١) مسافة اقرب دنو عندما تكون $\theta = \theta_0$ ، اى

$$r_{min} = \frac{mh^2Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1+2Emh^2Q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (٦ـ ٦٦)$$

عند استخدام المعادلتين (٦ ـ ٦٤) و (٦ـ ٦٥)، يمكن كتابة المعادلة السابقة ، بعد تبسيطها قليلا على النحو التالي ـ

$$r_{min} = \frac{p \cot (\phi/2)}{-1+ \left[1+\cot^2(\phi/2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{p \cos (\phi/2)}{1- \sin(\phi/2)} \qquad (٦ـ ٦٧)$$

اذن عندما ϕ تساوى ٩٠ درجة ، نجد

$$r_{min} = 2.41\ p = 5.1 \times 10^{-12}\ cm.$$

لاحظ ان المعادلتين (٦ـ ٦٦) و (٦ـ ٦٧) تصبحان معادلتين غير محددتين indeterminate عندما $h = p = 0$ • وفي هذه الحالة يصوب الجسيم مباشرة نحو النواة • ويقترب منها على طول خط مستقيم ، وتتنافرا معها باستمرار بقوة كولوم ، فيتناقص انطلاقه الى الصفر عندما يصل الى نقطة معينة r_{min} ، ثم من هذه النقطة يعود على طول المستقيم نفسه ، اى بزاوية انحراف مقدارها ١٨٠ درجة • وفي هذه الحالة يمكن ايجاد قيمة r_{min} باستخدام حقيقة كون الطاقة E ثابتة• الطاقة الكامنة في نقطة الرجوع تساوى Qq/r_{min} ، والطاقة الحركية تساوى صفرا •

اذن

$$E = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = Qq/r_{min}$$

و

$$r_{min} = \frac{Qq}{E} \qquad (٦ـ ٦٨)$$

رأينا ان $r_{min} \simeq 10^{-12}cm$ لجسيمات الفا المنبعثة من الراديوم والمنحرفة بنويات الذهب عندما تكون زاوية الانحراف تساوى ١٨٠ درجة• ان ملاحظة هذه الانحرافات تبين ان نصف قطر النواة بحدود ١٠ ـ ١٢ سم

٦ـ١٣) الحركة في مدارات تقرب من الدائريه ـ الاستقرار*

Motion in a Nearly Circular Orbit-Stability

من الممكن الحصول على مسار دائرى تحت تأثير اى قوة تجاذب مركزية ، ولكن ليست جميع القوى المركزية تحدث مدارات دائرية مستقرة . ولنناقش السؤال التالي ، اذا كان جسيم يتحرك في مدار دائرى وعانى اضطرابا صغيرا ، فهل يبقى المدار الناشئ قريبا من المسار الدائرى الاصلي ؟ لكي نجيب على هذا السؤال ، نعود الى المعادلة التفاضلية القطبية للحركة ، اى المعادلة (٦ـ ٢٢) .

لما كانت $\dot{\theta}=h/r^2$ ، فيمكننا كتابة المعادلة القطبية على النحو التالي

$$m\ddot{r} - \frac{mh^2}{r^3} = f(r) \qquad (٦ـ ٦٩)$$

الآن ، للمدار الدائرى ، r ثابتة اى ، $\ddot{r} = 0$. اذن ، عند تسمية نصف قطر المدار الدائرى " a " نحصل على

$$-\frac{mh^2}{a^3} = f(a) \qquad (٦ـ ٧٠)$$

للقوة عندما $r = a$.

الآن لنعبر عن الحركة القطبية بدلالة المتغير x الذى يعرف كالاتي

$$x = r - a \qquad (٦ـ ٧١)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٦ـ ٦٩) على النحو التالي

$$m\ddot{x} - mh^2 (x + a)^{-3} = f(x + a) \qquad (٦ـ ٧٢)$$

وبفك الحدين اللذين يحتويان على $x + a$ كمتسلسلة اساسية في x ، نحصل على

$$m\ddot{x} - mh^2a^{-3}(1 - 3\frac{x}{a} + ..) = f(a) + f'(a)\, x + .. \qquad (٦ـ ٧٣)$$

وتختصر هذه المعادلة استنادا الى العلاقة المبينة في المعادلة (٦ـ ٧٠) الى

$$m\ddot{x} + \left[\frac{-3}{a} f(a) - f'(a)\right] x = 0 \qquad (٦ـ ٧٤)$$

هذا اذا اهملنا الحدود التي تحتوى على x^2 فما فوق · واذا كان معامل x (الكمية التي في داخل الاقواس) في المعادلة السابقة موجبا ، عندئذ تكون المعادلة هي نفس معادلة المتذبذب التوافقي البسيط· وفي هذه الحالة ، اذا اقلق الجسيم ، فسيتذبذب توافقيا حول الدائرة $r=a$ ، بحيث يكون المدار الدائرى مستقرا · وبالعكس ، اذا كان معامل x سالبا في المعادلة (٦ـ ٧٤) ، فعندئذ تكون الحركة غير متذبذبة والنتيجة هي ازدياد x اسيا exponentially مع الزمن ، والمدار غير مستقر · (اذا كانت معامل x تساوى صفرا ، عندئذ يجب ان يحتوى المفكوك على الحدود العالية لاجل حساب الاستقرار) · اذن ، يمكننا القول ان المدار الدائرى الذى نصف قطره a يكون مستقرا اذا كانت دالة القوة $f(r)$ تستوفي المتباينة

$$f(a) + \frac{a}{3} f'(a) < 0 \qquad (٦ـ ٧٥)$$

وبصورة خاصة ، اذا كانت دالة القوة القطبية مرفوعة الى اى أس ، اى أن

$$f(r) = -cr^n$$

عندئذ يكون شرط الاستقرار كما يلي

$$-ca^n - \frac{a}{3} cna^{n-1} < 0$$

وعند تبسيطه يصبح

$$n > -3 \qquad (٦ـ ٧٦)$$

اذن قانون التربيع العكسي ($n = -2$) يعطي مدارات دائرية مستقرة، كما هو الحال في قانون المسافة المباشرة ($n = 1$) · والحالة الاخيرة هي لمتذبذب توافقي يتذبذب في بعدين · وللقوة الرابعة العكسية ($n = -4$) تكون المدارات الدائرية غير مستقرة · ويمكن ايضا البرهنة على ان المدارات الدائرية غير مستقرة لقانون التكعيب العكسي للقوة ($n = -3$) · ولاثبات ذلك فمن الضرورى ادخال حدود مرفوعة الى قوى اكبر من واحد في المعادلة القطبية ·

٦ـ١٤) القبا والزوايا القبوية للمدارات التي تقترب من الدائرية

Apsides and Apsidal Angles for Nearly Circular Orbits

الاوج او القبا هو نقطة في مدار يكون فيها متجه نصف القطر في نهايته الصغرى او العظمى • ان نقاط الحضيض الشمسي والاوج هي اقباء لانصاف اقطار المدارات • والزاوية التي يقطعها متجه نصف القطر بين قبوين متتاليين تسمى بالزاوية القبوية • فالزاوية القبوية اذن تساوى π للمدارات الاهليليجية تحت تأثير قانون التربيع العكسي للقوة •

رأينا في حالة الحركة التي تقترب من المدار الدائرى ، ان r تتذبذب حول الدائرة $r = a$ (اذا كان المدار مستقرا) • ومن المعادلة (٦ـ ٧٤) ينتج ان زمن الذبذبة τ_r لهذا التذبذب هو ـ

$$\tau_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{-\left[\frac{3}{a} f(a) + f'(a)\right]}} \qquad (٦ـ٧٧)$$

في هذه الحالة تكون الزاوية القبوية مساوية تماما لمقدار الزيادة في الزاوية القطبية θ خلال الفترة الزمنية التي يتذبذب فيها r من قيمة النهاية الصغرى الى قيمة النهاية العظمى التالية • اى ان هذا الزمن يساوى $\frac{1}{2}\tau_r$ • ولما كانت $\dot{\theta} = h/r^2$ ، اذن تبقى $\dot{\theta}$ ثابتة تقريبا ، ويمكننا كتابتها كما يلي ـ

$$\dot{\theta} \simeq \frac{h}{a^2} = \left[-\frac{f(a)}{ma}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ٧٨)$$

وقد نتجت الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦ـ ٧٠) • اذن الزاوية القبوية تعطى من

$$\psi = \frac{1}{2}\tau_r\dot{\theta} = \pi\left[3 + a\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ٧٩)$$

اذن لقانون القــوة الاساسي

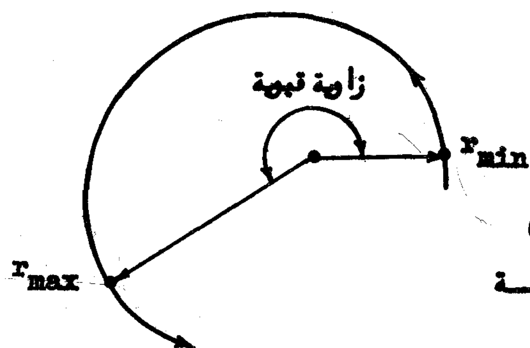
$$f(r) = -cr^n$$

نحصل علــى

$$\psi = \pi (3 + n)^{-\frac{1}{2}} \qquad (٦ـ ٨٠)$$

في هذه الحالة تكون الزاويــة القبويــة مستقلة عن حجم المدار . فالمدار يكـــــون تكراريا او ثنائي الدخول ، في حالة قانون التربيع العكسي ($n = -2$) الــذى تكون فيه $\psi = \pi$ وكذلك في حالة القانون الخطي ($n = 1$) الذى تكون فيــه $\psi = \frac{\pi}{2}$.وعلى اية حال اذا كانت $n = 2$ مثلا ، عندئذ $\psi = \pi/\sqrt{5}$ وهـو عــدد اصم لمضاعفات π ،ولذلك لاتعيد الحركة نفسها .

واذا ابتعد قانون القوة قليلا عن قانون التربيع العكسي ، فعندئذ اما ان تتقــدم الاقباء اوتتأخر باستمراره ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الزاوية القبوية اكبر قليـــلا او اصغر قليلا من π . (انظر الشكل ٦ـ١٠) .



الشكل (٦ـ ١٠)
الزاويــــة القبويـــــة

لنفرض ، على سبيل المثال ، ان القوة هي من النوع

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4} \qquad (٦ـ ٨١)$$

حيث ϵ صغيرا جدا . (هذا هو نوع دالة القوة في سطح حلقة ، كما هو واضح من المثال ٢ ، بند ٦ـ٣) . الزاويــة القبويــة ، مــن المعادلــة (٦ ـ ٧٩)

هي

$$\Psi = \pi \left(3 + a\,\frac{2ka^{-3} + 4\epsilon a^{-5}}{-ka^{-2} - \epsilon a^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pi \left(\frac{1 - \epsilon k^{-1}a^{-2}}{1 + \epsilon k^{-1}a^{-2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \pi\left(1 + \frac{\epsilon}{ka^2}\right) \qquad (٦ـ ٨٢)$$

وقد اهملنا في الخطوة الاخيرة حدود الكمية ϵ/ka^2 المرفوعة الى اسس اكبر من واحد • نرى إن الاقباء تتقدم اذا كانت ϵ موجبة ، بينما تتأخر اذا كانت ϵ سالبة •

لقد قرب اضطراب الجاذبية لكوكب معين بسبب الكواكب الاخرى في المنظومة الشمسية بالحد ϵ/r^4 في المعادلة (٦ـ ٨١) • ويمكن اعتبار ظاهرة التجمع لاحد الكواكب السيارة تقريبا هي نفسها فيما لو انتشرت على شكل حلقة • (انظر المعادلة ٦ـ ١٣) وعند حساب الاضطرابات لعطارد ، الكوكب الاعمق ، نجد ان الحضيض الشمسي لهذا الكوكب يحدث تقدما مقداره ٥٣١ ثانية في القوس لكل قرن • لكن التقدم المقاس هو ٥٧٤ ثانية في القرن • هذا الفرق الذى مقداره ٤٣ ثانية قد فسر بالنظرية النسبية العامة لانشتاين (٢).

يبتعد مجال الجاذبية بالقرب من الارض قليلا من قانون التربيع العكسي ، لان الارض ليست كروية تماما • وبسبب هذا تقدم الحضيض القمرى للتابع الصناعي الذى يقع مداره بالقرب من مستوى الاستواء باستمرار باتجاه حركة التابع • ان ملاحظة هذا التقدم كانت احدى الطرق الدقيقة لحساب شكل الارض • فقد بينت هذه الملاحظات ان شكل الارض يقرب من الشكل العرموطي • واضافة الى حدوث تقدم في الحضيض القمرى للتابع الدائر فان تفلطح الارض يسبب ايضا طوافا precess لسطح المدار اذا لم يكن المدار في مستوى السطح الاستوائي الارضي •

---

(٢) يوجد تقدم متبق صغير بسبب تفلطح الشمس • هذا التقدم غير ثابت ولكن قد يكون اقل من ثانية واحدة في القرن •

تمارين

٦- ١) اثبت ان قوة الجاذبية على جسيم داخل قشرة كروية رقيقة تساوى صفرا بطريقة (آ) ايجاد القوة مباشرة و (ب) البرهنة على ان جهد الجاذبية ثابت ·

٦-٢) اذا فرضنا ان الكرة الارضية منتظمة وثقبت من قطبها الشمالي الى قطبها الجنوبي ثم اسقط جسيم في الثقب المستقيم · برهن على ان حركته ستكون توافقية بسيطة ثم جد زمن دورة هذه الحركة ·

٦-٣) جد قانون القوة على كوكب اذا كانت المجموعة الشمسية مغمورة في غبار سحابي منتظم كثافته ρ ·

٦-٤) جسيم ينزلق داخل انبوب مستقيم املس يمر بصورة مائلة خلال الارض · اثبت ان الحركة ستكون توافقية بسيطة ولها نفس زمن دورة التمرين (٦- ٢) اهمل تأثيرات الدوران ·

٦-٥) جد جهد الجاذبية والقوة على جسيم احادى الكتلة وموضوع على محور حلقة رقيقة نصف قطرها a وكتلتها M. اذا كان جسيم الاختبار على مسافة r من مركز الحلقة ·

٦- ٦) يتحرك جسيم في مجال مركزى بالمدار الحلزوني $r=ae^{k\theta}$ · جد قانون القوة · ثم بين كيف تتغير θ مع الزمن t ·

٦-٧) اذا كان مدار جسيم دائرى ويقع مركز القوة على محيط الدائرة · فما هو قانون القوة ؟

٦- ٨) اذا تحرك جسيم في مجال التكعيب العكسي للقوة ، جد المدارات الممكنة ·

٦-٩) اذا تحرك جسيم في المدار الحلزوني

$$r = a\theta^3$$

وكانت θ تتغير مع الزمن t وفقا للمعادلة

$$\theta = ct^3$$

هل يكون مجال القـوة مركزياً ؟ فان لم يكن كذلك فكيف تتغير θ مع الزمـــن t اذا كانت القـوة مركزيـة ؟

٦ـ١٠) يتحرك قمر صاروخي بالقرب من الارض مبتدئاً بمدار دائرى ، فاذا رغبنا في وضع القمر في مدار جديد بحيث تكون مسافة نقطة الاوج مساوية لنصف قطر مدار القمـــر حول الارض (٢٤٠٠٠٠ ميل) (آ) احسب نسبة الانطلاق الجديد الى انطلاقـــه في المدار الدائرى اللازمة لانجاز ذلك ٠ افرض ان نصف قطر المدار الدائرى الاصلي يساوى ٤٠٠٠ ميل (ب) احسب بعد نقطة الاوج الجديدة اذا كانت نسـبة الانطلاق ٩٩ ر٠ من القيمـة المحسوبة اعلاه ٠ هذه المسألة توضح الدقة المتناهيـة اللازمة لانجاز المدار حول القمـر ٠

٦ـ١١) اذا كان المحور الرئيسي لمدار مذنب اهليلجي يساوى ١٠٠ وحدة فلكيـــة (آ) ماهو زمن الدورة ؟ (ب) اذا كان بعده عن الشمس يساوى ٥ ر٠ وحدة فلكيـة في الحضيض الشمسي ، فما هي قيمـة الاختلاف المركزى للمدار ؟ (جـ) ماهو انطـلاق المذنب في الحضيض الشمسي والاوج ٠

٦ـ١٢) لوحظ ان انطلاق كوكب يساوى v_a عندما يكون على مسافة r_a من الشمس ، واتجاه حركتـه يصنع زاويـة ϕ مع متجـه نصف القطر من الشمس ٠ برهن علـى ان المحور الرئيسي لمدار الكوكب الاهليلجي يصنع زاويـة مع متجـه نصف قطـــــر

$$\cot^{-1}\left(\tan\phi - \frac{2r_e v_e^2}{r_a v_a^2}\csc 2\phi\right)$$

الكوكب الابتدائي ، حيث r_e و v_e يمثلان نصف قطر مدار الارض وانطلاقهـا على التتالـي ٠

٦ـ١٣) لوحظ مذنب في البداية على مسافة $\frac{1}{2}$ وحدة فلكية من الشمس وسير بانطلاق يساوى ضعف انطلاق الارض ٠ بين من علاقة الطاقة ، فيما اذا كان مدار المذنـــب

قطعا ناقصا مكافئا او قطعا زائدا .

٦ـ١٤) يسير مذنب في مدار على شكل قطع مكافيء واقع في مستوى مدار الارض . فاذا فرضنا ان ، مدار الارض دائرى الشكل نصف قطره a ، اثبت ان النقاط التي يقطع فيها المذنب مدار الارض هي

$$\cos\theta = -1 + \frac{2p}{a}$$

حيث p تمثل مسافة الحضيض الشمسي للمذنب كما عرفت في $\theta = 0$.

٦ـ١٥) استخدم نتيجة التمرين السابق للبرهنة على ان الفترة الزمنية التي يبقى فيها المذنب داخل مدار الارض هي الكسر .

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{3\pi}\left(\frac{2p}{a} + 1\right)\left(1 - \frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

من السنة ، والقيمة العظمى لهذه الفترة الزمنية هي $\frac{2}{3\pi}$ سنة ، او حوالي ١١ اسبوع .

٦ـ ١٦) يتحرك جسيم في مجال مركزى فيه قانون القوة

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\epsilon}{r^3}$$

جد معادلة المدار . برهن بصورة خاصة ، عندما تكون ϵ صغيرة يكون المدار قطعاً ناقصاً طائفاً ببطء .

٦ـ ١٧) برهن النص في البند (٦ـ١٠) الذى يقول ان ، معدل زمن الطاقة الكامنة لجسيم يتحرك بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقوة $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ هو $-k/a$ حيث a يمثل نصف المحور الرئيسي للقطع الناقص .

٦ـ ١٨) جد الزاوية القبوية لمدارات تقترب من الدائرة في مجال مركزى فيه قانون القوة كما يلي

$$f(r) = -k\,\frac{e^{-br}}{r^2}$$

٦ـ ١٩) يتحرك جسيم بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقـوة ٠ اثبـت ان حاصل ضرب انطلاقي النهاية العظمى والصغرى يسـاوى $(2\pi a/\tau)^2$ حيث a تمثل نصف المحور الرئيسي و τ زمن الدورة ٠

٦ـ٢٠) برهن على ان المدار الدائرى الذى نصف قطره r في التمريـن (٦ ـ ١٨) مستقرا اذا كانت r اقل من b^{-1} .

٦ـ ٢١) اثبت ان المعادلة التفاضلية القطبيـة لحركـة جسيم في مجـال مركـزى ، المعادلة (٦ـ ٦٩) ، هي نفس معادلة الجسيم الذى يتحرك على خط مستقيم تحت تأثير "الجهد الفعلي effective potential " $U(r)$ والذى يسـاوى

$$U(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

حيث القـوة الحقيقية $f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ ٠ ارسم خطا بيانيا تقريبا للجهـد $U(r)$ لحالة المدار الدائرى المستقر ، مثل $V(r) = -k/r$ ، وللمدار غير المستقر مثل $V(r) = -k/r^3$.

٦ـ٢٢) اثبت ان شرط الاستقرار لمدار دائرى نصف قطره a يكافيء الشـرط $d^2U/dr^2 > 0$ عندما تكون $r=a$ حيث $U(r)$ تمثل " الجهد الفعلي " الـذى عرف في التمرين السابق ٠

٦ـ٢٣) جد الشرط الذى تكون فيـه المدارات الدائرية مستقرة اذا كانت دالـة القـوة في المجال المركزى على الشكل التالي

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4}$$

٦ـ٢٤) اذا انغمرت المجموعة الشمسية في سحاب غبارى منتظم (التمرين " ٦ ـ ٣ ") فما هي الزاوية القبوية لكوكب يتحرك بمدار يقرب من الدائرى ؟ لقد اقترح هـذا

السؤال سابقا كتوضيح ممكن لتقدم الحضيض الشمسي لعطارد ٠

٦-٢٥) الكتب المتقدمة لموضوع نظرية الجهد تبين ان الطاقة الكامنة لجسيم كتلته m في مجال جاذبية جسم كروى مفلطح مشابه للكرة الارضية هو تقريبا

$$V(r) = -\frac{k}{r}\left(1 + \frac{\epsilon}{r^2}\right)$$

حيث r تشير الى مسافات المستوى الاستوائي ، $k = GMm$ كالسابق ، و $\epsilon = (\frac{2}{5})R\,\Delta R$ حيث R تمثل نصف القطر الاستوائي و ΔR هي الفرق بين الاستوائي وانصاف الاقطار القطبية ٠ جد الزاوية القبوية لتابع صناعي في مدار يقرب من الدائرى في مستوى الاستواء الارضي حيث $R=4000$ mi و $\Delta R = 13$ mi ٠

٦-٢٦) وفقا للنظرية النسبية ، الجسيم الذى يتحرك في مجال مركزى بطاقة كامنة مقدارها $V(r)$ سيكون له نفس المدار الذى يعمله جسيم طاقته الكامنة

$$V(r) - \frac{\left[E - V(r)\right]^2}{2mc^2}$$

وفقا للميكانيك الكلاسيكي ٠ حيث E تمثل الطاقة الكلية و m كتلة الجسيم و c سرعة الضوء ٠ من هذه ، جد الزاوية القبوية للحركة في مجال التربيع العكسي للقوة $V(r) = -k/r$.

الفصـــل الســـابع

دايناميك منظومـة الجسـيمـات

Dynamics of a System of Particles

لدراسة منظومـة او مجموعـة كبيرة من الجسيمات الحرة ، سوف نركز اهتمامنـــــا بالدرجة الاولى على المظهر العام لحركـة تلك المجموعـة .

٧ـ١) مركـز الكتلـة والزخم الخطي

Center of Mass and Linear Momentum

تتكون منظومتنا العامة من n جسيمة كتلتها m_1 ، m_2 ، ...... ، m_n ومتجهات مواضعها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ ، ..... ، $\vec{r}_n$ على التتالـــي . ونعرف مركـز كتلـة المنظومـة بالنقطـة التي متجـه موضعها $\vec{r}_{cm}$ (الشكل٧ـ ١) كما يلـي

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m} \qquad (٧ـ١)$$

حيث $m = \sum m_i$ تمثل الكتلـة الكليـة للمنظومـة . ومن الواضـح ان التعريـف المذكور اعلاه يكافيء المعادلات الثلاث التالية ـ

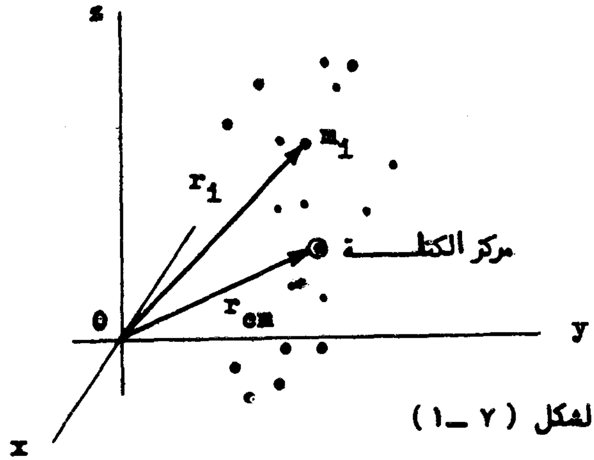
$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

ونعرّف الزخم الخطي $\vec{p}$ للمنظومـة بالمجموع الاتجاهي لعزوم الجســـيمات المنفردة ، اى

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\vec{v}_i \qquad (٧ـ٢)$$

ومن تفاضل المعادلـة (٧ـ ١) بالنسـبة للزمـن نحصـل علـى

$$\vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_{cm} \qquad (٧ـ٣)$$



الشكل (٧ ـ ١)

مركز الكتلة لمنظومة من الجسيمات

اى ان الزخم الخطي لمنظومة من الجسيمات يساوى سرعة مركز الكتلـة مضروبـة فـــي الكليـة للمنظومـة .

افرض الآن وجود قوى خارجية مثل $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، ..... ، $\vec{F}_i$ ، .... ، $\vec{F}_n$ تؤثر على الجسيمات المناظـره (اى ان F_1 تؤثر على m_1 و F_2 تؤثـــر علـــى m_2 ... الخ) . وبالاضافة الى ذلك قد توجد قوى تصادم داخلية بين اى جسيمين في المنظومـة . وسنرمز لهذه القوى الداخلية بـ $\vec{F}_{ij}$ الذى يعني القـوة المؤثـرة على الجسيم i من قبل الجسيم j . فمعادلة الحركة للجسيم i عندئذ تكون ـ

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}}_i \qquad (٧ ـ ٤)$$

حيث $\vec{F}_i$ تعني القـوة الخارجية الكلية المؤثرة على الجسـيم i . ويمثـــل الحد الثاني في المعادلة السابقة المجموع الاتجاهي لجميع القوى الداخلية المؤثرة على الجسيم i من جميع الجسيمات الاخرى للمنظومة (تعني الفتحة على علامـة الجمـــع استثناء الحد $i = j$) . وعند جمع المعادلة (٧ ـ ٤) لـ n من الجســـيمات .

نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \qquad (٧-٥)$$

ومعنى الجمع الثنائي المذكور اعلاه ، ان لكل قوة $\vec{F}_{ij}$ يوجد ايضا قوة $\vec{F}_{ji}$ وهاتان القوتان متساويتان ومتضادتان ، اى ان

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (٧-٦)$$

وفقا لقانون نيوتن الثالث للفعل ورد الفعل . لذلك تختصر القوى الداخلية بأزواج وتتلاشى الجمع الثنائي . اذن يمكننا كتابة المعادلة (٧-٥) كالاتي -

$$\sum \vec{F}_i = \sum \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}_{cm} \qquad (٧-٧)$$

وبالكلمات : ان تعجيل مركز الكتلة لمنظومة من الجسيمات هو نفس تعجيل جسيم منفرد كتلته تساوى الكتلة الكلية للمنظومة تحت تأثير مجموع القوى الخارجية .

افرض ، على سبيل المثال ، حشدا من الجسيمات تتحرك في مجال جاذبية منتظم . ولما كان $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ لكل جسيم فعندئذ -

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i\vec{g} = m\vec{g}$$

وتنتج الخطوة الاخيرة لان $\vec{g}$ ثابتة . اذن

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g} \qquad (٧-٨)$$

هذه هي نفس معادلة الجسيم المنفرد او القذيفة .

اذن يكون مسار مركز كتلة الشظايا المتطايرة من قنبلة مدفع متفجرة في الهواء هو نفس مسار القطع المكافيء الذى تسلكه القذيفة في حالة عدم انفجارها .

وفي الحالة الخاصة التي لاتوجد فيها قوى خارجية تؤثر على المنظومة (او اذا كانت $\sum \vec{F}_i = 0$) ، عندئذ $\vec{a}_{cm}$ يساوي صفرا و $\vec{v}_{cm}$ تكون ثابتة • لذلك يبقى الزخم الخطي للمنظومة ثابتا •

$$\sum \vec{p}_i = \vec{p} = m\vec{v}_{cm} = \text{constant} \qquad (٧\_٩)$$

هذه هي قاعدة حفظ الزخم الخطي • ان ثبوت الزخم الخطي في الميكانيك النيوتوني لمنظومة معزولة يرتبط مباشرة بقانون نيوتن الثالث ، وفي الحقيقة هو نتيجة له ، وحتى في الحالات التي تكون فيها القوى بين الجسيمات لاتخضع بصورة مباشرة لقانون الفعل ورد الفعل ، مثل قوى المغناطيسية بين الشحنات المتحركة ، تبقى قاعدة حفظ الزخم الخطي صحيحة عندما يحسب الزخم الخطي الكلي للجسيمات والمجال الالكترو مغناطيسي (١) .

٧ــ ٢) الزخم الزاوي للمنظومة

Angular Momentum of a System

كما ورد في البند (٦ـ٥) ، الزخم الزاوي لجسيم منفرد عُرّف بالضرب الاتجاهي $\vec{r} \times m\vec{v}$. لذلك يعرف الزخم الزاوي $\vec{L}$ لمنظومة جسيمات بالجمع الاتجاهي لزخوم الجسيمات الزاوية ، هي

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)$$

لنحسب مشتقة الزمن للزخم الزاوي • وباستعمال قانون التفاضل للضرب الاتجاهي نجد ان ــ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i) \qquad (٧\_١٠)$$

---

(١) انظر على سبيل المثال

W. T. Scott, The Physics of Electricity and Magnetism, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

ان الحد الاول في يمين المعادلة يساوى صفرا ، لان $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$ ولما كان $m_i \vec{a}_i$ يساوى القوة الكلية المؤثرة على الجسيم i ، لذلك يمكننا كتابة —

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij} \right) \right]$$

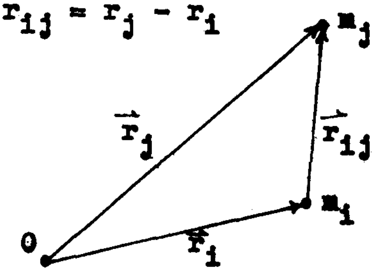
$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \qquad (٧ — ١١)$$

حيث ، كما في البند (٧ — ١) ، $\vec{F}_i$ تمثل القوة الخارجية الكلية على الجسيم i و $\vec{F}_{ij}$ تمثل القوة (الداخلية) المؤثرة على الجسيم i من اى جسيم آخر مثل j . ويتكون الجمع الثنائي في يمين المعادلة من حدود مزدوجة على الشكل التالي —

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \qquad (٧ — ١٢)$$

وعند تمثيل متجه الازاحة للجسيم j بالنسبة للجسيم i بالرمز $\vec{r}_{ij}$ نرى من المثلث المبين في الشكل (٧ — ٢) ان

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \qquad (٧ — ١٣)$$



الشكل (٧ — ٢)
تعريف المتجه $\vec{r}_{ij}$.

ولما كان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ij}$ لذلك تبسط العلاقة (٧ — ١٢) الى

$$-\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} \qquad (٧ — ١٤)$$

الذى يساوى صفرا عندما تكون القوى الداخلية مركزية ، اى اذا كانت تؤثر على طول

الخطوط التي تربط كل زوج من الجسيمات. فالجمع الثنائي ، في المعادلة (٧ ــ ١١)، اذن يساوى صفرا . والضرب الاتجاهي $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$ كما عرف ، في البند (١ ــ ١٢)، هو عــزم القــوة الخارجية $\vec{F}_i$. والمجموع $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ هو اذن العزم الكلـي لجميع القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة . فاذا مثلنا العزم الخارجـي الكلـــي بـ $\vec{N}$ ، عندئذ تصبح المعادلة (٧ــ ١١) كما يلي ــ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٧ ــ ١٥)$$

اى ان ، المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوى لمنظومة يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على المنظومـة .

اذا كانت المنظومـة معزولـة ، عندئذ $\vec{N} = 0$ ،اى يبقى الزخم الزاوى ثابتـــا في المقدار والاتجاه .

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \text{constant} \qquad (٧ ــ ١٦)$$

هذه صياغة لقاعدة حفظ الزخم الزاوى. وهي تعميم للمعادلة (٦ــ ١٨) لجسـيم منفرد في مجال مركزى. كثبوت الزخم الخطي الذى بحث في البند السابق ، كذلـــك الزخم الزاوى لمنظومة شحنات متحركة معزولة يكون ثابتا ، عند اعتبار الزخم الـــزاوى للمجال الكهرومغناطيسي (٢).

٧ ــ ٣) الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات

Kinetic Energy of a System of Particles

الطاقة الحركية الكلية T لمنظومة جسيمات تساوى مجموع طاقات الجسيمات فـــي المنظومـة ، اى

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \tfrac{1}{2} m_i \, (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \qquad (٧ ــ ١٧)$$

---

(١) انظر ملاحظة (١) .

وكما هو واضح من ألشكل (٧ ـ ٣) ، يمكننا التعبير عن متجـه كل موضع $\vec{r}_i'$ علـــى النحو التالي

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i' \qquad (١٨ - ٧)$$

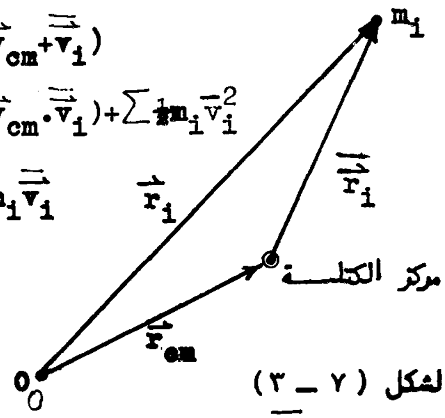
حيث $\vec{r}_i'$ يمثل موضع الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلة . وعند التفاضل بالنسـبة للزمن t ، نحصل على

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \qquad (١٩ - ٧)$$

حيث $\vec{v}_{cm}$ تمثل سرعة مركز الكتلة و $\vec{v}_i'$ سرعة الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلة ،

اذن يمكن كتابة T على النحو التالي

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')$$
$$= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$
$$= \tfrac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$
$$+ \sum \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$



الشكل (٧ ـ ٣)
تعريـــــف $\vec{r}_i'$

من المعادلة (٧ ـ ١٨) ، عندنا

$$\sum m_i \vec{r}_i' = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) =$$

وبالتماثل ، نحصل على

$$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$$
$$= \sum m_i \vec{r}_i - m\vec{r}_{cm} = 0$$

اذ ن تبسط معادلة الطاقة الحركية الى

$$T = \tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \sum \tfrac{1}{2}m_i\bar{v}_i^2 \qquad (٧-٢٠)$$

الطاقة الحركية الكلية لمنظومة جسيمات اذ ن ، تساوى مجموع الطاقة الحركية الانتقالية لمركز الكتلة (الحد الاول على اليمين) زائداً مجموع الطاقات الحركية لجسيمات المنظومة بالنسبة لمركز الكتلة (الحد الاخير) ٠ وهذا الفرز في الطاقة الحركية الى اجزائها مفيد في حالات كثيرة ، كما في الفيزياء الجزيئية ٠ لان ، الطاقة الحركية الكلية للجزيئة تتكون من الطاقة الانتقالية للجزيئة ككل زائدا الطاقة الذبذبية والدورانية داخل الجزيئة ٠

٧-٤) حركة جسمين يؤثر احدهما على الآخر ٠ الكتلة المصغرة ٠

Motion of Two Interacting Bodies. The Reduced Mass

لنفرض حركة منظومة متكونة من جسمين (تعامل كجسيمين) يؤثر احدهما على الآخر بقوة مركزية ٠ سنفرض ان المنظومة معزولة ، اذ ن يتحرك مركز الكتلة بسرعة ثابتة ٠ وللسهولة سنأخذ مركز الكتلة في نقطة الاصل ٠ عندئذ نحصل على

$$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0 \qquad (٧-٢١)$$

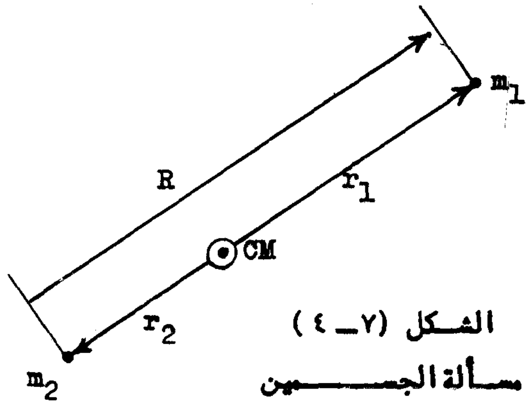
حيث كما هو واضح من الشكل (٧-٤) ، ان المتجهات $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ تمثل مواضع الجسيمات m_1 و m_2 ، على التتالي ، بالنسبة الى مركز الكتلة ٠ فاذا كانت $\vec{R}$ تمثل موضع الجسيم "1" بالنسبة الى الجسيم "2" عندئذ -

$$\vec{R} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (٧-٢٢)$$

وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٧-٢١) ٠

ان المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم "1" بالنسبة الى مركز الكتلة هي -

$$m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = f(R)\,\frac{\vec{R}}{R} \qquad (٧-٢٣)$$



الشكل (٧ـ ٤)
مسألة الجسمين

حيث $f(R)$ تمثل مقدار القوة المتبادلة بين الجسيمين • وباستعمال المعادلة (٧ـ ٢٢) يمكننا كتابة ـ

$$\mu \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = f(R)\,\frac{\vec{R}}{R} \qquad (٧\text{ـ}٢٤)$$

حيث ـ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧\text{ـ}٢٥)$$

وتسمى الكمية μ بالكتلة المصغرة reduced mass • المعادلة الجديدة للحركة (٧ـ ٢٤) ، تعطي حركة الجسيم 1 بالنسبة الى الجسيم 2 هذه المعادلة هي تماما نفس المعادلة الاعتيادية لحركة جسيم منفرد كتلته μ يتحرك في مجال قوة مركزي يعطى من $f(R)$ • لذلك اخذت بنظر الاعتبار حركة m_2 بالنسبة الى مركز الكتلة اوتوماتيكيا وذلك باحلال الكتلة المصغرة μ محل m_1 • واذا كان للجسمين نفس الكتلة m ، عندئذ $\mu = m/2$ • وبالعكس ، اذا كانت m_2 اكبر بكثير من m_1 ، بحيث m_1/m_2 تصبح صغيرة ، جدا ، عندئذ تقترب قيمة μ من m_1 •

ولجسمين يجذب احدهما الآخر تثاقليا ، يكون عندنا

$$f(R) = -\frac{Gm_1m_2}{R^2} \qquad (٢٦ - ٧)$$

وفي هذه الحالة تكون معادلة الحركة

$$\mu\ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{R^2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \qquad (٢٧ - ٧)$$

وهذه تماثل معادلة جسيم منفرد في مجال التربيع العكسي المركزى (كما بحث في البند ٦ـ ٨) • ولما كان اختيار الرموز السفلية (subscripts) اعتباطيا ، نستنتج ان كل جسيم يتحرك بقطع ناقص مركزى حول الآخر ومتخذا كل منهما الآخر كبوءرة له • اذن ، عند اعتبار الارض والقمر منظومة معزولة ، فالقمر يتحرك بقطع ناقص بوءرته مركز الارض ، والارض تتحرك بقطع ناقص بوءرته مركز القمر •

٧ ـ ٥) التصادم Collisions

كلما تصادم جسمان، تكون القوة التي يوءثر كل منهما على الآخر خلال التلامس قوة داخلية ، اذا فرض ان الجسمين يكونان منظومة واحدة • فالزخم الكلي اذن لايتغير ، اى يمكننا كتابة

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (٢٨ - ٧)$$

اوما يكافئها

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (٢٩ - ٧)$$

حيث تشير الرموز السفلية (1 و 2) الى الجسمين وعلامة الفتحة الى ~~المركزيه~~ الزخوم والسرع بعد التصادم على التتالي • والمعادلات السابقة عامة وهي تطبق على اى جسمين بغض النظر عن اشكالهما ، صلادتهما ، وهلم جرا •

اما بالنسبة الى معادلة توازن الطاقة ، فيمكننا كتابة

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٣٠ - ٧)$$

او

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \qquad (٣١ - ٧)$$

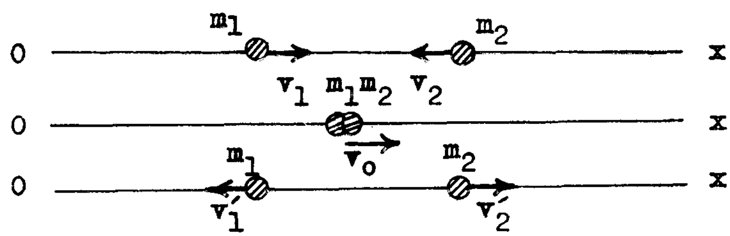
وقد ادخلت هنا الكمية Q لتشير الى مقدار الزيادة ، او النقصان ، في الطاقة التي تحدث نتيجة التصادم ·

في حالة التصادم التام المرونة لايحدث تغيير في الطاقة الحركية الكلية اى Q =0 · واذا كانت هناك خسارة في الطاقة عندئذ تكون Q موجبة ويسمى هذا النوع من التصادم بالماص للطاقة endoergic · وقد يحدث ان يكون هناك اكتساب في الطاقة · فمثلا عند انفجار احد الجسمين في نقطة التماس · في هذه الحالة تكون Q سالبة ويسمى التصادم بالباعث للطاقة exoergic ·

ان دراسة التصادم له اهمية خاصة في الفيزياء الذريه والنوويه · قد تكون هذه الاجسام ذرات ، نويات ، او اى جسيم اولي ، مثل الالكترونات ، البروتونات ، وهلم جرا ·

التصادمات المباشرة Direct Collisions

لنفرض الحالة الخاصة التي يكون فيها تصادم جسمين او جسيمين رأسيا والتي تحدث فيها الحركة كليا على خط مستقيم واحد كما هو مبين في الشكل (٧ ـ ٥) ·



(الشكل ـ ٧ ـ ٥) تصادم جسيمين رأسيا

في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة توازن الزخم ، معادلة (٧ ـ ٢٩) ، بدون استخدام رموز المتجهات كما يلي :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \qquad (٧ - ٣٢)$$

واشارات السرع (v's) تعين الاتجاه على طول خط الحركة · ولاجل حساب قيم السرع بعد التصادم ، اذا كانت قيمها قبل التصادم معلومة ، يمكننا استخدام

معادلة الزخم المذكورة اعلاه مع معادلة توازن الطاقة ، المعادلة (٧ ـ ٣١) ، اذا كنا نعرف قيمة Q . وفي اغلب الاحيان يكون من الملائم لهذا النوع من المسائل ادخال برمتر آخر $\in$ يسمى بمعامل الارتداد coefficient of restitution وتعرف هذه الكمية بالنسبة بين انطلاق الابتعاد v' الى انطلاق الاقتراب v . وفي رموزنا يمكن كتابة $\in$ على النحو التالي

$$\in = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|} = \frac{v'}{v} \qquad (٧ ـ ٣٣)$$

وتعتمد القيمة العددية لمعامل الارتداد بصورة رئيسية على التركيب والتكوين الفيزيائي للجسمين . ويمكن التحقق بسهولة من ان التصادم التام المرونة تكون فيه قيمة $\in = 1$ ، ويتم ذلك بالتعويض عن $Q = 0$ في المعادلة (٧ ـ ٣١) ، وحلها مع المعادلة (٧ ـ ٣٢) للحصول على السرع النهائية .

وفي حالة التصادم غير التام المرونة يلتصق الجسمان معا بعد ان يتصادما ، بحيث تكون $\in = 0$. ولمعظم الاجسام الحقيقية تقع قيمة $\in$ بين اقصى الحدين صفر وواحد . فقيمتها لكرات البليارد العاجية تكون حوالي ٩٥ر٠ . وقد تعتمد قيمة معامل الارتداد ايضا على انطلاق الاقتراب . ويكون هذا واضحا بصورة خاصة في حالة مركبات السلكون التي تعرف في الصناعة بأسم المعجون السخيف " silly putty " فالكرة المصنوعة من هذه المادة ترتد بسرعة عالية عندما تضرب سطحا صلبا ولكنها تتصرف كمعجون عادي في السرع الواطئة .

ويمكننا حساب قيم السرع النهائية من المعادلة (٧ ـ ٣٢) ومن تعريف معامل الارتداد ، المعادلة (٧ ـ ٣٣) فالنتيجة تكون ـ

$$v_1' = \frac{(m_1 - \in m_2)v_1 + (m_2 + \in m_2)v_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧ ـ ٣٤)$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + \epsilon m_1)v_1 + (m_2 - \epsilon m_1)v_2}{m_1 + m_2} \qquad (٧ - ٢٤)$$

وعند اعتبار حالة التصادم غير المرن ، وذلك بالتعويض عن $\epsilon = 0$ ، نجد ان $v_1' = v_2'$ اى لايوجد ارتداد . وبالعكس ، في الحالة الخاصة التي تكون فيهما كتلتا الجسمين متساويتين ، اى $m_1 = m_2$ ، وهي تامة المرونة ، $\epsilon = 1$ ، عندئذ نحصل على —

$$v_1' = v_2$$
$$v_2' = v_1$$

فالجسمان ، اذن ، يتبادلان سرعتيهما فقط بسبب التصادم .

وفي الحالة العامة اى التصادم المباشر غير التام المرونة ، يمكن بسهولة التحقق من ان الخسارة في الطاقة Q ترتبط بواسطة معامل الارتداد بالمعادلة التالية

$$Q = \tfrac{1}{2}\mu v^2 (1 - \epsilon^2)$$

حيث $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$ هي الكتلة المصغرة ، و $v = |v_2 - v_1|$ هي الانطلاق النسبي قبل التصادم . والاشتقاق ترك كتمرين .

٧ — ٦) التصادم المائل والتشتت . مقارنة بين المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة

Oblique Collisions and Scattering. Comparison of Laboratory and Center-of-mass Coordinates

نلفت انتباهنا الآن الى الحالة الاكثر عمومية وهي الحركة غير المقيدة بخط مستقيم . حيث يجب استخدام معادلات الزخم بصيغة جبر المتجهات ، اى المعادلات (٧ — ٢٨) و (٧ — ٢٩) ، ولندرس الحالة الخاصة لجسيم كتلته m_1 وسرعته الابتدائية $\vec{v}_1$ (الجسيم الساقط) الذى يضرب جسيما آخر كتلته m_2 وابتدائيا في حالة السكون (جسيم الهدف) . هذه هي مسألة نموذجية تتواجد في الفيزياء النووية . فمعادلات

الزخم لهذه الحالة تكون على النحو التالي

$$\vec{P_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'} \qquad (٧ـ ٣٥)$$

$$m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} \qquad (٧ ـ ٣٦)$$

وشرط توازن الطاقة هو

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٧ـ ٣٧)$$

او

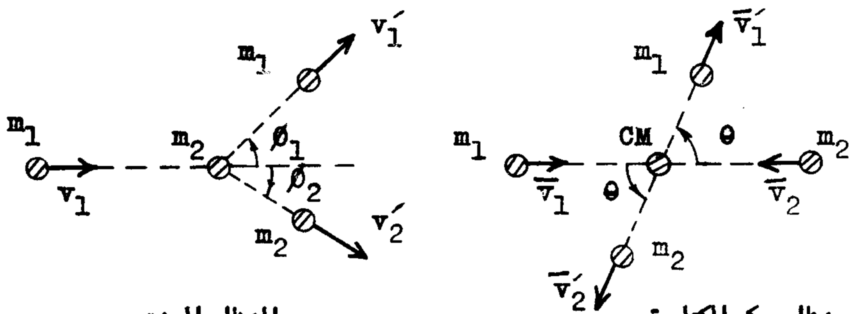
$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \qquad (٧ ـ ٣٨)$$

حيث تشير الفتحات هنا ، كالسابق ، الى السرع والزخوم بعد التصادم ، وتمثل Q محصلة الطاقة المفقودة او المكتسبة بسبب التصادم . ان Q هي من الكميات الاساسية والمهمة في الفيزياء الذرية والنووية ، لانها تمثل الطاقة المتحررة او الممتصة في التصادمات الذرية والنووية . في حالات كثيره . يتحطم جسيم الهدف او يتغير عند التصادم . في حالات كهذه ، تختلف الجسيمات التي تترك التصادم عن الجسيمات التي تدخله . وتحسب هذه بسهولة وذلك بتعيين كتل مختلفة للجسيمات التي تترك التصادم مثل m_3 و m_4 . وعلى اية حال ، يبقى قانون حفظ الزخم الخطي دائما ساري المفعول . ولكن وفقا للنظرية النسبية ، تتغير كتلة الجسيم مع الانطلاق بصورة واضحه والتي سوف ندرسها في الفصل الاخير . في هذا الموضع ، يمكننا القول ان قانون حفظ الزخم ، يبين في المعادلة (٧ ـ ٢٨) يصح في النظرية النسبية اذا فرضت الكتلة كدالة للانطلاق .

محاور مركـــز الكتلـــــة Center-of-mass Coordinates

تجرى الحسابات النظرية في الفيزياء النووية غالبا بدلالة كميات منسوبة الى محاور يكون فيها مركز كتلـة الجسيمات المتصادمة ساكنا . وبعكس ذلك، تجرى الملاحظـات التجريبية على تشتت الجسيمات بدلالة المحاور المختبرية . فمن المهم اذن ، بحـث باختصار مسألة التحول من أحد النظامين الى الآخر .

يوضح الشكل (٧ ـ ٦) مخطط لمتجهات السرعة في النظام المختبرى ونظام مركـز الكتلـة . حيث تمثل ϕ_1 زاويـة انحراف الجسيم الساقط بعد ان يصطدم بجسـيم الهدف و ϕ_2 تمثل الزاوية التي يصنعها خط حركة جسيم الهدف مع خط حركة الجسيم الساقط . كلتا الزاويتين ϕ_1 و ϕ_2 مقاسة بالنظام المختبرى . ولما كان مركز الكتلة في نظام مركز الكتلة ، يجب ان يقع دائما على الخط الواصل بين الجسيمين، فانهمـا يقتربان من مركز الكتلة فيتصادمان ثم يبتعدان عنـه باتجاهين متضادين .



الشـكل (٧ ـ ٦)

مقارنة بين المحاور المختبرية ومركز الكتلـة

وتمثل θ زاوية انحراف الجسيم الساقط في نظام مركز الكتلـة .

من تعريف مركز الكتلة ، يكون الزخم الخطي في نظام مركز الكتلة صفرا قبل التصادم وبعده . اذن يمكننا كتابة

$$\vec{\bar{p}}_1 + \vec{\bar{p}}_2 = 0 \qquad (٧ ـ ٣٩)$$

$$\overrightarrow{\overline{p}'_1} + \overrightarrow{\overline{p}'_2} = 0 \qquad (٧ - ٤٠)$$

وقد استعملت الخطوط هنا لتبين ان الكمية في السؤال منسوبة الى نظام مركز الكتلــة ·
ومعادلة توازن الطاقة هي

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\overline{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\overline{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\overline{p}_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (٧ - ٤١)$$

ويمكننا الآن حذف $\overline{p}_2$ و $\overline{p}'_2$ من معادلة الطاقة وذلك باستخدام علاقات الزخم ·
والنتيجة بدلالة الكتلــة المصغرة هي

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\overline{p}_1'^2}{2\mu} + Q \qquad (٧ - ٤٢)$$

وتكتب علاقات الزخم ، المعادلات (٧ ـ ٣٩) و (٧ ـ ٤٠) بدلالة السرع على النحـــو التالي

$$m_1\overrightarrow{\overline{v}_1} + m_2\overrightarrow{\overline{v}_2} = 0 \qquad (٧ - ٤٣)$$

$$m_1\overrightarrow{\overline{v}'_1} + m_2\overrightarrow{\overline{v}'_2} = 0 \qquad (٧ - ٤٤)$$

وسرعة مركز الكتلة هي

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (٧ - ٤٥)$$

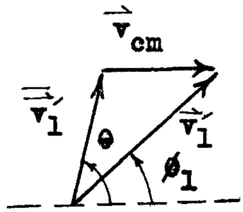
اذن

$$\overrightarrow{\overline{v}_1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (٧ - ٤٦)$$

وقد وضحت العلاقة بين متجهات السرع $\overrightarrow{\overline{v}'_1}, \vec{v}'_1, \vec{v}_{cm}$ في الشــكل (٧ ـ ٧)
ومن الشكل نرى ان ـ

$$v'_1 \sin \phi_1 = \overline{v}'_1 \sin \theta \qquad (٧ - ٤٧)$$

$$v_1' \cos \phi_1 = \overline{v}_1' \cos \theta + v_{cm} \qquad (٧\_٤٨)$$



الشكل (٧ــ ٧) : العلاقة بين متجهات السرع في النظام المختبرى ونظــام مركــز الكتلــــة

وبقسمة المعادلتين نجد ان العلاقة التي تربط زوايا التشتت تكون على النحو التالـــي

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta} \qquad (٧\_٤٩)$$

حيث γ تمثل البرمتر العددى وقيمتــه تعطى بالعلاقة التاليــة

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{\overline{v}_1'} = \frac{m_1 v_1}{\overline{v}_1' (m_1 + m_2)} \qquad (٧\_٥٠)$$

والخطوة الاخيرة نتجت من استعمال المعادلـــــــــــــــــــة (٧ــ ٤٥) .

والآن يمكننا حساب قيمــة $\overline{v}_1'$ بسهولة بدلالة الطاقة الابتدائيـــة للجســـــيم الساقط من معادلة الطاقــة ، اى المعادلة (٧ــ ٤٢) . وهذه تعطينا المعلومـــات الضروريــة لايجاد γ وهكذا نستنتج العلاقة بين زوايا التشتت . فمثلا ، في حالـــة التصادم التام المرونــة ، $Q = 0$ ، نجد من معادلة الطاقــة ان $\overline{p}_1 = \overline{p}_1'$ ، أو $\overline{v}_1 = \overline{v}_1'$. وهذه النتيجــة مع المعادلة (٧ ــ ٤٦) ، تعطيان القيمـــــــــة

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \qquad (٧\_٥١)$$

للتصادم المــرن .

ولنفرض حالتين خاصتين لمثل هذه التصادمات المرنة لاهميتها التعليمية .
الاولى ، اذا كانت كتلة جسيم الهدف m_2 اكبر بكثير من كتلة الجسيم الساقط
m_1 عندئذ تكون γ صغيرة جدا . اذن $\tan \phi_1 \approx \tan \theta$ أو $\phi_1 \approx \theta$.
اي ان ، زوايا التشتت كما ترى في النظامين المختبري ومركز الكتلة تكون متساوية تقريبا .

الحالة الخاصة الثانية هي ان تتساوى كتلة الجسيم الساقط مع كتلة الجسيم الهدف ، اي $m_2 = m_1$. وفي هذه الحالة تكون $\gamma = 1$ ، وتصبح علاقة التشتت الى مايلي

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\phi_1 = \frac{\theta}{2}$$

اي ان ، زاوية الانحراف في النظام المختبري تساوي تماما نصف زاوية الانحراف في نظام مركز الكتلة . ولما كانت زاوية انحراف جسيم الهدف تساوي $\pi - \theta$ في نظام مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٧ ـ ٦) ، عندئذ ، نفس الزاوية في النظام المختبري تساوي $\frac{\pi - \theta}{2}$. اذن ، يترك الجسيمان نقطة التصادم بحيث يكون اتجاه كل منهما عموديا على الآخر عندما ينظر اليهما في النظام المختبري .

وللحالة العامة للتصادمات غير تامة المرونة فقد تركت كتمرين للبرهنة على ان γ تعطى بالعلاقة التالية

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \left[1 - \frac{Q}{T} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (٧ ـ ٥٢)$$

حيث T تمثل الطاقة الحركية للجسيم الساقط المقاسة بالنظام المختبري .

٧ ـ ٧) الدفع ـ Impulse

القوى التي يستغرق تأثيرها فترة قصيرة جدا ، مثل تلك التي تؤثر بها الاجسام

عند التصادم ، تسمى بالقوى الدافعة impulsive forces اذا حصرنا انتباهنا الى جسم واحد او جسيم فنعلم ان معادلة الحركة التفاضلية هي

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (٧-٥٣)$$

او بصيغة التفاضل

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt \qquad (٧-٥٤)$$

ولنكامل بالنسبة للزمن في الفترة بين $t = t_1$ الى و $t = t_2$ ، وهذا هو الزمن الذى تؤثر فيه القوة ، عندئذ نحصل على

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \qquad (٧-٥٥)$$

ويسمى تكامل الزمن للقوة بالدفع ويمثل بالرمز $\hat{\vec{p}}$ ، ووفقا لذلك تصبح المعادلة السابقة

$$\Delta(m\vec{v}) = \hat{\vec{p}} \qquad (٧-٥٦)$$

اى ان التغير في الزخم الخطي لجسم تحت تأثير قوة دافعة يساوى دفع القوة ·

ويمكننا اعتبار الدفع المثالي هو الذى ينتج من قوة لانهائية في الكبر ولكنها تنتهي في فترة زمنية تقرب من الصفر بحيث يبقى التكامل $\int \vec{F}dt$ ثابتا ، ودفع مثالي كهذا سيحدث تغيرا آنيا في الزخم وفي سرعة الجسم بدون ان ينتج عنه اية ازاحة ·

العلاقة بين الدفع ومعامل الارتداد

لنطبق مفهوم الدفع على حالة التصادم المباشر بين جسمين كرويين (بحث في البند ٧ــ٥) ، وسوف نقسم الدفع الى قسمين ، الدفع الضاغط ، $\hat{\vec{p}}_c$ ، ودفع الارتداد $\hat{\vec{p}}_r$ ، وسنركز اهتمامنا فقط على المركبات التي تقع على طول الخط الواصل بين المركزين ، فللتضاغط اذن ، يمكننا كتابة

$$m_1 v_o - m_1 v_1 = \hat{P}_c \qquad (٧ـ٥٧)$$

$$m_2 v_o - m_2 v_2 = -\hat{P}_c \qquad (٧ـ٥٨)$$

حيث v_o تمثل السرعة المشتركة للجسيمين في اللحظة التي يكون فيها انطلاقهما النسبي صفرا · وبالتماثل ، للارتداد ، نحصل على

$$m_1 v_1' - m_1 v_o = \hat{P}_r \qquad (٧ـ٥٩)$$

$$m_2 v_2' - m_2 v_o = -\hat{P}_r \qquad (٧ـ٦٠)$$

وبحذف v_o من المعادلتين (٧ـ٥٧) و(٧ـ٥٨) وكذلك من المعادلتين (٧ـ٥٩) و (٧ـ٦٠) ، نحصل على المعادلتين التاليتين

$$m_1 m_2 (v_2 - v_1) = \hat{P}_c(m_1 + m_2)$$

$$m_1 m_2 (v_1' - v_2') = \hat{P}_r(m_1 + m_2)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على الاولى نحصل على العلاقة التالية

$$\frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c} \qquad (٧ـ٦١)$$

ولكن الطرف الايسر هو تعريف معامل الارتداد ϵ · اذن

$$\epsilon = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_c} \qquad (٧ـ٦٢)$$

اذن ، معامل الارتداد يساوى النسبة بين دفع الارتداد والدفع الضاغط ·

٧ ـ ٨) حركة جسم متغير الكتلة . حركة الصاروخ

Motion of a Body with Variable Mass. Rocket Motion.

علينا ان نكون حذرين عند وضع المعادلات التفاضلية للحركة لحالة جسم تتغير كتلته مع الزمن . ان مفهوم الدفع قد يكون مفيدا لهذا النوع من المسائل .

خذ الحالة العامة لحركة جسم تتغير كتلته . وافرض ان $\vec{F}_{ext}$ تمثل القوة الخارجية التي تؤثر على الجسم في زمن معين و Δm تمثل الزيادة في كتلة الجسم التي تحدث في فترة زمنية قصيرة Δt . عندئذ تمثل $\vec{F}_{ext}\,\Delta t$ الدفع المتولد عن القوة الخارجية ويكون لدينا ـ

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = (\vec{P}_{total})_{t+\Delta t} - (\vec{P}_{total})_t$$

للتغيير في الزخم الخطي لكلي للمنظومة . فاذا كانت $\vec{v}$ تمثل سرعة الجسم و $\vec{V}$ سرعة الزيادة في الكتلة Δm بالنسبة للجسم ، عندئذ يمكننا كتابة ـ

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \left[m\vec{v} + \Delta m(\vec{v} + \vec{V})\right]$$

وهذه تبسيط الى

$$\vec{F}_{ext}\,\Delta t = m\,\Delta\vec{v} + \Delta m\,\Delta\vec{v} - \vec{V}\,\Delta m$$

وبقسمة كل حد على Δt نحصل على ـ

$$\vec{F}_{ext} = (m + \Delta m)\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{V}\,\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

اذن عندما تقترب Δt من الصفر في الغاية نحصل على المعادلة العامة التالية

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} - \vec{V}\dot{m} \qquad (٧ ـ ٦٣)$$

وقد تمثل القوة $\vec{F}_{ext}$ هنا جاذبية الارض او مقاومة الهواء والخ . وفي حالة الصواريخ يمثل الحد $\vec{V}\dot{m}$ الدفع المضاد " Thrust "

ولنطبق المعادلة على حالتين خاصتين . اولا ، افرض ان جسما يتحرك في ضباب او سديم بحيث تزداد كتلته عند مروره . في هذه الحالة تكون السرعة الابتدائية

لتراكم المادة صفرا • اذن $\vec{V} = -\vec{v}$ ونحصل على

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\dot{m} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (٧ــ ٦٤)$$

لمعادلة الحركة • وتستخدم هذه فقط عندما تكون السرعة الابتدائية للمادة المتراكمــة تساوى صفرا • وما عدا ذلك يجب استخدام المعادلة العامة (٧ــ ٦٣) •

خذ حركة الصاروخ للحالة الثانية • في هذا المثال تكون اشارة $\dot{m}$ سالبة ، لان الصاروخ يخسر كتله على شكل وقود مقذوف عندئذ يتجه $\vec{V}\dot{m}$ بعكس اتجاه السرعة النسبية للوقود المقذوف $\vec{V}$ • وللتبسيط سوف نحل معادلة الحركة للحالة التي تكون فيها القوة الخارجية $\vec{F}_{ext}$ صفرا • عندئذ نحصل علــى

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{V}\dot{m} \qquad (٧ ــ ٦٥)$$

ويمكننا فرز المتغيرات والتكامل لايجاد $\vec{v}$ كما يلي ــ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{V}\,\frac{dm}{m\,dt}$$

$$\int d\vec{v} = \int \frac{\vec{V}\,dm}{m}$$

فاذا فرضت $\vec{V}$ ثابتة ، عندئذ يمكننا التكامل بين الغايتين لايجاد الانطلاق كدالــة للكتلــة m •

$$\int_{v_0}^{v} dv = -V\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 + V\ln\frac{m_0}{m}$$

حيث m_0 تمثل الكتلة الابتدائية للصاروخ زائدا الوقود غير المحترق ، m الكتلــة في اى زمن و V انطلاق الوقود المقذوف بالنسبة الى الصاروخ • وبسبب طبيعــة الدالــة اللوغارتيميــة ، من الضرورى استعمال كميــة كبيرة من الوقود الى نســبة وزن الصاروخ فارغ (بدون وقود) لاجل الحصول على انطلاقات عالية لضرورتها في منصــة انطلاق القمر الصناعي •

تمارين

٧ ــ ١) • منظومة متكونة من ثلاث جسيمات ، كتلة كل منها واحد • فاذا كانت مواضعها وسرعها كالآتي

$$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j} \qquad \vec{v}_1 = 2\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k} \qquad \vec{v}_2 = \hat{j}$$

$$\vec{r}_3 = \hat{k} \qquad \vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

جـ موضع وسرعة مركز الكتلة • جد كذلك الزخم الخطي للمنظومة •

٧ ــ ٢) (آ) جد الطاقة الحركية للمنظومة السابقة • (ب) جد الزخم الزاوي حول المركز •

٧ ــ ٣) • بندقية كتلتها M تطلق قذيفة كتلتها m ، فاذا كانت سرعة الفوهة (سرعة القذيفة بالنسبة الى البندقية) هي v_0 ، ماهو الانطلاق الفعلي للقذيفة مباشرة بعد ان تترك ماسورة البندقية ؟ •

٧ ــ ٤) • اطلقت قذيفة كتلتها m وانطلاقها v_0 مباشرة نحو قالب خشبي كتلته M موضوع على طاولة افقية خشنة • فاذا كانت μ تمثل معامل الاحتكاك الانزلاقي بين القالب والطاولة ، فما هي المسافة التي ينزلقها القالب قبل أن يصل الى حالة السكون ؟ •

٧ ــ ٥) • قذفت شظية بزاوية ٤٥ بانطلاق ابتدائي v_0 ، وفي اعلى نقطة من المسار انفجرت الشظية الى قسمين متساويين ، احدهما تحرك مباشرة نحو الاسفل بالنسبة الى الارض بانطلاق ابتدائي $2v_0$ • ماهو اتجاه وانطلاق القسم الآخر مباشرة بعد الانفجار ؟ •

٧ـ ٦) ٠ثلاثة جسيمات متساوية الكتلة تتحرك على خط مستقيم ٠ في البداية كانت مواضع الجسيمات في النقاط ـ ١، صفر، +١، وسرعها $4v_o$ ، $2v_o$ ، v_o على التتالي ٠ جد السرع النهائية للجسيمات على فرض ان التصادم كان تام المرونة ٠

٧ـ٧) ٠سقطت كرة من ارتفاع h على رصيف افقي ٠ فاذا كانت ϵ تمثل معامل الارتداد اثبت ان المسافة العمودية الكلية التي تقطعها الكرة قبل ان يتوقف ، ارتداد الكرة هي ـ

$$h(1 + \epsilon^2)/(1 - \epsilon^2).$$

٧ـ ٨)٠ في السؤال السابق جد الزمن الكلي الذى ترتد فيه الكرة ٠

٧ـ٩)٠اشتق المعادلات (٧ـ ٣٤)٠

٧ـ١٠)٠افرض ان الارض والقمر يمثلان منظومة معزولة اثبت ان كلا منهما يتحرك بقطع ناقص حول مركز كتلتيهما المشترك ٠

٧ـ١١) ٠ اثبت ان الطاقة الحركية لمنظومة متكونة من جسمين هي

$$\tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2$$

حيث $m = m_1 + m_2$ ، v الانطلاق النسبي و μ الكتلة المصغرة ٠

٧ـ١٢)٠ اثبت ان الثابت c في المعادلة (٦ـ ٥٨) لزمن دورة كوكب حول الشمس يجب ان يكون $2\pi\left[G(M+m)\right]^{-\frac{1}{2}}$ بدلا من $2\pi(GM)^{-\frac{1}{2}}$ حيث M تمثل كتلة الشمس و m كتلة الكوكب ٠

٧ـ١٣)٠ اذا حدث تصادم مباشر بين جسمين اثبت ان الخسارة في الطاقة الحركية تساوى

$$\tfrac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2)$$

حيث μ تمثل الكتلة المصغرة ، v الانطلاق النسبي قبل التصادم و ϵ هي معامل الارتداد ·

٧ـ١٤)·جسيم متحرك كتلته m_1 اصطدم اصطداما مرنا بجسيم هدف كتلته m_2 وكان ابتدائيا في حالة السكون · فاذا كان التصادم رأسيا اثبت ان الجسيم الساقط يفقد $4\mu / m$ من طاقته الحركية الاصلية ، حيث μ هي الكتلة المصغرة و $m = m_1 + m_2$ ·

٧ـ١٥)· اثبت ان الزخم الزاوى لمنظومة متكونة من جسيمين هو

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} + \vec{R} \times \mu\vec{v}$$

حيث $m = m_1 + m_2$ ، μ هي الكتلة المصغرة ، $\vec{R}$ متجه الموضع النسبي و $\vec{v}$ هي السرعة النسبية للجسيمين ·

٧ـ١٦)·بروتون كتلته m_p وسرعته الابتدائية $\vec{v}$ يصطدم بذرة هليوم ، كتلتها $4m_p$ ابتدائيا في حالة السكون · اذا كان البروتون يترك نقطة الاصطدام بزاوية ٤٥ مع خط الحركة الاصلي · جد السرعة النهائية لكل جسيم · افرض ان التصادم تام المرونة ·

٧ـ١٧)· حل السؤال السابق للحالة التي يكون فيها التصادم غير مرن و Q تساوى $\frac{١}{٤}$ طاقة البروتون الابتدائية ·

٧ـ١٨)· بالرجوع الى السؤال (٧ـ ١٦) ، جد زاوية التشتت Scattering للبروتون في مركز كتلة المنظومة ·

٧ـ١٩)·جد زاوية تشتت البروتون في مركز كتلة المنظومة في السؤال (٧ـ١٧) ·

٧ـ٢٠) • جسيم كتلتـه m وزخمـه الابتدائي p_1 اصطدم بجسيم لـه نفس الكتلـة وكان في حالة السكون • فاذا كان مقدار الزخم النهائي للجسيمين هـو p_1' ، p_2' على التتالي • اثبت ان مقدار الخسارة في الطاقـة للتصـادم هـو

$$Q = \frac{p_1' p_2'}{2m} \cos \psi$$

حيث ψ هي الزاوية بين مسارى الجسيمين بعد التصادم •

٧ـ٢١) اشتق المعادلـة (٧ـ ٥٢) •

٧ـ٢٢) اطلق صاروخ عموديا الى الاعلى • اذا فرضت g ثابتة • جد معادلة الحركة • ماهي نسبة الوقود الى وزن الصاروخ بدون وقود للحصول على انطلاق نهائـي يساوى انطلاق انفلات الارض(٧ ميل بالثانية) اذا كان انطلاق الغاز المستنفذ (آ) $\frac{١}{٢}$ ميل في الثانية • و (ب) ٢ ميل في الثانية ؟ افرض ان معـدل الخسارة في الوقود في الثانية ثابتا ويساوى ١ % من الكتلة الابتدائية للوقود •

٧ـ٢٣) • سلسلة منتظمة ثقيلة طولها a علقت ابتدائيا بحيث كان جزءا من طولهـا مقداره b يتدلى من حافة الطاولة • والجزء الباقي والذى طولـه $a - b$ ملفوف بالقرب من الحافة • فاذا تركت السلسلة تتحرك • اثبت ان انطلاقها عنـد آخر حلقة تترك نهاية الطاولة هو $\left[2g(a^3 - b^3)/3a^2\right]^{\frac{1}{2}}$

٧ـ٢٤) • جد المعادلة التفاضلية لحركة قطرة مطر تسقط خلال الضباب فتزداد كتلتهـا اثناء سقوطها • افرض انها تبقى كرويـة الشكل وان معدل التراكم يتناسب مـع المقطع العرضي للقطرة مضروبا في انطلاق السقوط • اثبت ان القطـرة تبـدأ مـن السـكون عندمـا تكـون ابتدائيـا صغيـرة جـدا عندئـذ يكـون التعجيـل ثابتـا ويسـاوى $g/7$ •

الفصــــل الثامــــن

ميكانيك الاجسام الصلده ـ الحركة في مستو

Mechanics of Rigid Bodies Motion in a Plane

قد يعتبر الجسم الصلد متكونا من منظومة جسيمات مواضعها النسبية ثابتــة ، او بعبارة اخرى ، المسافة بين اى جسيمين ثابتة ، هناك مثالية في هذا التعريــــف للجسم الصلد ، لانــه اولا ، كما اشرنا في تعريف الجسيم ، لاتوجد في الطبيعــــــة جسيمات حقيقيــة ، وثانيا لاتكون الاجسام الممتدة الحقيقية تامة الصلادة ، اذ يتغيــر شكلها (تمتط ، تنضغط او تلتوى) بمقدار قد يزداد او ينقص عند تسليط قــوة خارجية عليها ، على اية حال ، سوف نهمل في الوقت الحاضر مثل هذه التغيرات .

٨ ـ ١) مركز الكتلــة لجســم صلد Center of Mass of a Rigid Body

سبق ان عرفنا مركز الكتلــة (البند ٧ ـ ١) لمنظومــة جسيمات الممثل بالنقطــة (x_{cm} ، y_{cm} ، z_{cm}) وهي كما يلي

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad و \quad y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \quad و \quad z_{cm} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

ولجسم ممتد صلــد ، يمكننا استبدال عملية الجمع بالتكامل على حجم الجســـم ، اى

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho x \, dv}{\int_v \rho \, dv} \quad و \quad y_{cm} = \frac{\int_v \rho y \, dv}{\int_v \rho \, dv} \quad و \quad z_{cm} = \frac{\int_v \rho z \, dv}{\int_v \rho \, dv} \qquad (٨ ـ ١)$$

حيث ρ تمثل الكثافــة و dv عنصر الحجم .

اذا كان الجسم الصلد قشرة رقيقــة الشـــكل فمعادلات مركــز الكتلــة تصبح ـ

$$x_{cm} = \frac{\int_s \rho x \, ds}{\int_s \rho \, ds} \quad و \quad y_{cm} = \frac{\int_s \rho y \, ds}{\int_s \rho \, ds} \quad و \quad z_{cm} = \frac{\int_s \rho z \, ds}{\int_s \rho \, ds} \qquad (٨ ـ ٢)$$

حيث ds يمثل عنصر المساحة و ρ كتلـة وحدة المساحة • ويمتد التكامـل علـى مساحة الجسـم •

وبالتماثل • اذا كان الجسم على شكل سلك رفيع • فيكـون عندنـا

$$x_{cm}=\frac{\int_{\ell}\rho x\, d\ell}{\int_{\ell}\rho\, d\ell},\quad y_{cm}=\frac{\int_{\ell}\rho y\, d\ell}{\int_{\ell}\rho\, d\ell},\quad z_{cm}=\frac{\int_{\ell}\rho z\, d\ell}{\int_{\ell}\rho\, d\ell} \qquad (٨\text{ـ}٣)$$

في هذه الحالة • ρ تمثل كتلـة وحدة الطول و $d\ell$ عنصـر الطـــــول •

وللاجسام المنتظمة المتجانسة • تكون عوامل الكثافة ρ ثابتة لجميع الحالات ولذلـك يمكن حذفها من كل المعادلات السابقة •

واذا كان هناك جسـم مركب اى يتكون من جزيئين او اكثر وكانت مراكز كتل الاجـزاء معروفة فمن الواضح عندئذ انـه يمكن من تعريف مركز الكتلـة كتابة ـ

$$x_{cm} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots\cdots}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots\cdots} \qquad (٨\text{ـ}٤)$$

مع معادلات مماثلة لكل من y_{cm} و z_{cm} • اى ان ($x_1,\ y_1,\ z_1$) يمثـل مركز كتلـة الجزء m_1 • وهلم جرا •

فرضيات التناظـر

اذا كان هناك جسـم متناظر • فمن الممكن الاستفادة من هذا التناظـر لتعييـن مركز الكتلـة • اذن • اذا كان للجسـم مستو للتناظر • اى • اذا كان لكـل جسـيم m_i صورة مثل m_i' بالنسبة لمستو ما • عندئذ يقع مركز الكتلـة في ذلك المسـتوى •

ولكي نبرهن هذا • لنفرض ان المستوى xy يمثل مستوى التناظر • عندئذ يكون عندنا ـ

$$z_{cm} = \frac{\sum (z_im_i + z_i'm_i')}{\sum (m_i + m_i')}$$

ولكن $m_i = m_i'$ و $z_i = -z_i'$ ، اذن تختزل حدود البسط بازواج ، ولذلك $z_{cm} = 0$ ، وهذا يعني ، ان مركز الكتلة يقع في المستوى ــ xy .

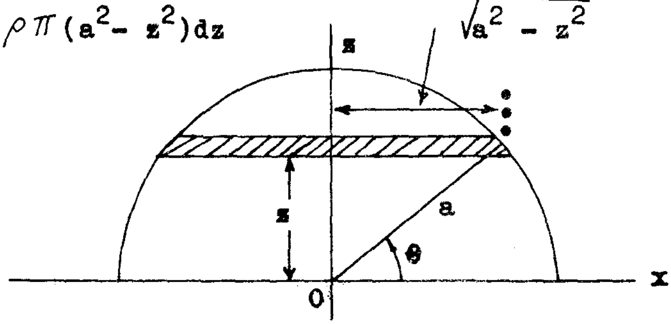
وبالتماثل ، اذا كان للجسم خط للتناظر فمن السهل ان نثبت ان مركز الكتلة يقع على ذلك الخط . وقد ترك البرهان كتمرين .

نصف كرة متلثة

لايجاد مركز كتلة نصف كرة متجانسة مصمتة نصف قطرها a ، ومن التناظر ، يقع مركز الكتلة على نصف القطر العمودي على سطحها المستوي . وباختيار محاور كما هو مبين في الشكل (٨ ــ ١) ، يكون مركز الكتلة واقعاً على المحور ــ z ولحساب z_{cm} نستعمل عنصر حجوم مدور سمكه dz ونصف قطره $(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ ، كما هو مبين في الشكل . اي ان $dv = \pi\,(a^2 - z^2)\,dz$

اذن

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho\pi z(a^2 - z^2)dz}{\int_0^a \rho\pi(a^2 - z^2)dz} = \frac{3}{8}a \qquad (٨ ــ ٥)$$



الشكل (٨ ــ ١)
المحاور لحساب مركز كتلة نصف كرة

قشـرة نصف كرويــة

لقشرة نصف كرويــة نصف قطرها a نستخدم نفس المحاور التي استخدمــت فــي المسألة السابقة (الشكل (٨ ـ ١)) ، ومرة اخرى ، من التناظر ، يقع مركز الكتلــة علـــى المحور ـ z . ولنختر للعنصر السطحي حلقــة دائرية عرضها $ad\theta$. اذن يمكــن كتابــة

$$ds = 2\pi\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\,a\,d\theta$$

ولكــن

$$\theta = \sin^{-1}(z/a),$$

اى ان

$$d\theta = (a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

اذ ن ،

$$ds = 2\pi\,a\,dz$$

ووفقا لذ لك يكون موضع مركز الكتلــة كما يلي

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho\,2\pi az\,dz}{\int_0^a \rho\,2\pi a\,dz} = \frac{1}{2}a \qquad (٨ \text{ ـ } ٦)$$

نصف دائرة

لايجاد مركز كتلــة سلك رفيع على شكل نصف دائرة نصف قطرها a ، نستخـدم محاور كالمبينة في الشكل (٨ ـ ٢) ، فيكون عندنا

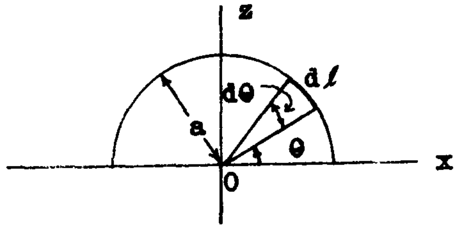
$$d\ell = a\,d\theta$$

و

$$z = a\sin\theta$$

اذ ن

$$z_{cm} = \frac{\int_0^\pi \rho\,(a\sin\theta)a\,d\theta}{\int_0^\pi \rho\,a\,d\theta} = \frac{2}{\pi}a \qquad (٨ \text{ ـ } ٧)$$



الشكل (٨ ـ ٢)

المحاور لحساب مركز كتلة سلك نصف دائري

صفيحة نصف دائرية

في حالة صفيحة نصف دائرية منتظمة ، يكون مركز الكتلة على المحور ـ z (الشكل ٨ ـ ٢) . وقد ترك ذلك كمسألة للبرهنة على ان ـ

$$z_{cm} = \frac{4}{3\pi} a \qquad (٨ ـ ٨)$$

٨ ـ ٢) التوازن الستاتيكي لجسم صلد
Static Equilibrium of a Rigid Body

رأينا (بند ٧ ـ ١) ان تعجيل مركز كتلة منظومة يساوي المجموع الاتجاهي للقوى الخارجية مقسومة على الكتلة . وبصورة خاصة ، اذا كانت المنظومة جسما صلدا وكان مجموع جميع القوى الخارجية يساوي صفرا ـ اي

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0 \qquad (٨ ـ ٩)$$

عندئذ سيبقى مركز الكتلة ساكنا ، اذا كان في ابدأية ساكنا . فالمعادلة (٨ ـ ٩) تعبر اذن عن شرط التوازن الانتقالي للجسم الصلد .

وبالتماثل ، ان تلاشي عزوم جميع القوى المسلطة ، اي

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots = 0 \qquad (٨ ـ ١٠)$$

يعني ان الزخم الزاوى للجسم لايتغير (بند ٧ــ٢) • هذا هو شرط التوازن الدوراني للجسم السلد ، اى اذا كان الجسم في البداية ساكنا ، فانه سوف لايبدأ بالدوران •

والمعادلتان (٨ــ٩) و(٨ــ١٠) معا يكونان الشرطين الضروريين لان يكون الجسم الصلد تام التوازن •

التوازن في مجال جاذبية منتظم

Equilibrium in a Uniform Gravitational Field

لنفرض ان جسما صلدا في مجال جاذبية منتظم كوجوده على سطح الكرة الارضية •

لما كان مجموع قوى الجاذبية يساوى $m\vec{g}$ حيث m هي كتلة الجسم ، فيمكننا كتابة شرط التوازن الانتقالي كما يلي ــ

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + m\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١١)$$

حيث $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ وهلم جرا ، هي جميع القوى الخارجية باستثناء الجاذبية •

وبالتماثل ، يمكن كتابة شرط التوازن الدوراني كمايلي ــ

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١٢)$$

ولكن $\vec{g}$ متجه ثابت ، لذلك يمكننا كتابة ــ

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \qquad (٨ــ١٣)$$

المعادلة السابقة تنص على ان عزم قوة الجاذبية حول اية نقطة • يساوى عزم قوة منفردة $m\vec{g}$ مؤثرة على مركز الكتلة [1] • فمعادلة التوازن الدوراني عندئذ تصبح

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0 \qquad (٨ــ١٤)$$

---

(١) يسمى مركز قوة التجاذب الظاهرى بمركز الثقل • وفي مجال جاذبية منتظم كالذى فرضناه ، يتطابق مركز الثقل ومركز الكتلة •

التوازن تحت تأثير قوى واقعه في نفس المستوى

Equilibrium under Coplanar Forces

اذا كانت خطوط تأثير منظومة قوى مسلطة على جسم صلد تقع في مستو واحد عندئذ يمكن ان نكتب $\vec{F}_1 = \hat{i}X_1 + \hat{j}Y_1$ وهلم جرا • فصيغ مركبات معادلات التوازن ، اى المعادلات (٨ـ٩) و(٨ـ١٠) ، (التي يتذكرها الطالب من الفيزياء الاولية)، عندئذ تكون

التوازن الانتقالي :

$$X_1 + X_2 + \dots = 0 \quad Y_1 + Y_2 + \dots = 0 \qquad (٨\_١٥)$$

التوازن الدوراني

$$x_1Y_1 - y_1X_1 + x_2Y_2 - y_2X_2 + \dots = 0 \qquad (٨\_١٦)$$

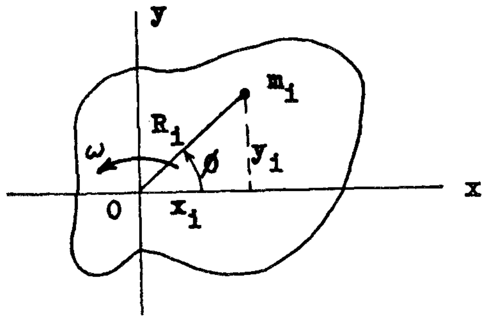
٨ـ٣) دوران جسم صلد حول محور ثابت ـ عزم القصور الذاتي

Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis. Moment of Inertia.

من ابسط حركات الجسم الصلد ، عدا الحركة الانتقالية الصرفة ، حركته الدورانية المقيدة حول محور ثابت• لنختر المحور ـ z في محاور مناسبة كمحور للدوران • فمسار الجسيم النموذجي m_i الذى موضعه النقطة (x_i ، y_i ، z_i) عندئذ يكون • دائرة نصف قطرها $R_i = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ومركزها يقع على المحور ـ z • ويمثل الشكل (٨ـ٣) مقطعا عرضيا للحركة موازيا للمستوى ـ xy •

انطلاق الجسيم i هو

$$v_i = R_i\omega = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}\omega \qquad (٨\_١٧)$$



الشكل (٨ ـ ٣)

مقطع عرضي لجسم صلد يدور حول المحور ـ Z

حيث ω تمثل الانطلاق الزاوى للدوران · من دراسة الشكل ، نرى ان للسرعة المركبات التالية ـ

$$\dot{x}_i = -v_i \sin \phi = -\omega y_i \qquad (٨ ـ ١٨)$$

$$\dot{y}_i = v_i \cos \phi = \omega x_i \qquad (٨ ـ ١٩)$$

$$\dot{z}_i = 0 \qquad (٨ ـ ٢٠)$$

حيث عرفت الزاوية ϕ كما هو مبين في الشكل · ويمكن كذلك الحصول على المعادلات السابقة بايجاد مركبات المعادلة التالية ـ

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad (٨ ـ ٢١)$$

حيث $\vec{\omega} = \vec{k}\,\omega$

لنحسب الطاقة الحركية لدوران الجسم · من العلاقه

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (٨\_٢٢)$$

حيث

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad (٨\_٢٣)$$

الكمية I التي عرفت في المعادلة السابقة ، لها اهمية خاصة في دراسة حركة الاجسام الصلدة · وتسمى بعزم القصور الذاتي ·

لنوضح كيفية دخول عزم القصور الذاتي بصورة عميقة في الموضوع ، لنحسب الزخم الزاوى حول محور الدوران · لما كان الزخم الزاوى لجسيم ، من التعريف ، يساوى $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ فمركبة ـ z عندئذ هي

$$m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = m_i (x_i^2 + y_i^2)\, \omega = m_i R_i^2 \omega \qquad (٨\_٢٤)$$

حيث استعملنا المعادلتين (٨ ـ ١٨) و (٨ ـ ١٩) · ونحصل على مركبة ـ z الكلية للزخم الزاوى ، والتي سنسميها L ، باخذ المجموع لجميع الجسيمات ، اى ـ

$$L = \sum_i m_i R_i^2 \omega = I \omega \qquad (٨\_٢٥)$$

رأينا في البند (٧ ـ ٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى لاى منظومة يساوى العزم الكلي للقوى الخارجية · ولجسم مقيد الدوران حول محو ثابت يكون عندنا ـ

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \qquad (٨\_٢٦)$$

حيث N تمثل العزم الكلي لجميع القوى المسلطة حول محور الدوران (مركبة $\vec{N}$ على طول المحور) · اذا كان الجسم صلداً ، عندئذ تكون I ثابتة ويمكننا ان نكتب ـ

$$N = I \frac{d\omega}{dt} \qquad (٨ـ٢٧)$$

والتناظر بين معادلات الحركة الانتقالية والدورانية حول محور ثابت هو كما يلي ـ

الانتقاليـــــة	الدورانيـــــة
الزخم الخطي $P = mv$	الزخم الزاوى $L = I\omega$
القـــــوة $F = m\dot{v}$	العـــــزم $N = I\dot{\omega}$
الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2$	الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}I\omega^2$

فعزم القصور الذاتي يناظر اذن الكتلة ، وهو مقياس للقصور الذاتي الدورانـــي لجســم نسبة الى محور ثابت للدوران ، تماما كما تكون الكتلة مقياسا للقصور الذاتـــي الانتقالي لجســم

٨ـ٤) حساب عــزم القصور الذاتي ـ

Calculation of the Moment of Inertia

في الحسابات الفعلية لعــزم القصور الذاتي $\sum mR^2$ للاجسام المتـــــددة ، يمكننا استبدال المجموع بالتكامل على الجسم ، تماماً كما فعلنا في حساب مركز الكتلـــة ، اى يمكننا كتابـــة ـ

$$I = \int R^2\, dm \qquad (٨ـ٢٨)$$

حيث dm تمثل عنصر الكتلة وتساوى حاصل ضرب الكثافة في عنصر مناسب (الحجـــم المساحة ، او الطول) . ومن المهم ان تتذكر ان R هي المسافة العمودية مـــن عنصر الكتلـــة على محور الدوران .

ومن الواضح ، لحالة الجسم المركب يمكننا ان نكتب من تعريف القصور الذاتي مايلي

$$I = I_1 + I_2 + \cdots \qquad (٨ـ٢٩)$$

حيث I_1 ، I_2 والخ هي عـزوم القصور الذاتيـه لمختلف الاجزاء حول المحـــور الخاص الذى تم اختياره ٠

لنحسب الآن عزوم القصور الذاتيـه لبعض الحالات الخاصة المهمة ٠

قضيب دقيـق

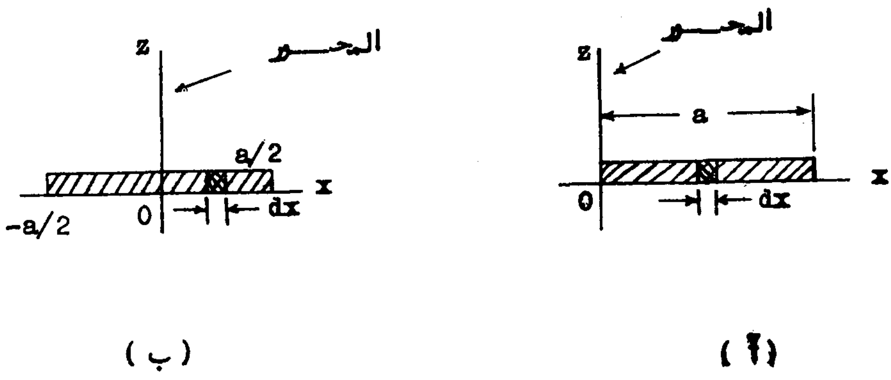
أن عـزم القصور الذاتي لقضيب رفيع منتظم طولـه a وكتلتـه m حـول محـور عمودى على احد طرفيـه (الشكل ٨ ـ ٤ (آ)) هـو ـ

$$I = \int_0^a x^2 \rho \, dx = \tfrac{1}{3} \rho a^3 = \tfrac{1}{3} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣٠)$$

وقد نتجت الخطوة الاخيرة لان $m = \rho a$.

اما اذا كان المحور يمر في مركز القضيب (الشكل ٨ ـ ٤ "ب") فنحصل علـــى

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \rho \, dx = \frac{1}{12} \rho a^3 = \frac{1}{12} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣١)$$



الشـــكل (٨ ـ ٤)

المحاور لحساب عـزم القصور الذاتي لقضيب (آ) حول احد طرفيـه

(ب) حـول المركـــز

الطوق او القشرة الاسطوانية **Hoop or Cylindrical Shell**

في حالة الطوق الدائري الدقيق او القشرة الاسطوانية تقع جميع الجسيمات على نفس البعد من المحور، فعزم القصور الذاتي اذن يكون ـ

$$I = ma^2 \qquad (٨ــ٣٢)$$

حيث a يمثل نصف القطر و m الكتلـة •

قرص دائري او اسطوانـة **Circular Disc or Cylinder**

سنستخدم المحاور القطبية لحساب عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم نصـف قطره a وكتلتـه m • وعنصر الكتلـة هنا عبارة عن حلقة دقيقة نصف قطرهـا r وسمكها dr ، وهي تعطى كما يلي ـ

$$dm = \rho \, 2\pi r \, dr$$

حيث ρ تمثل كتلـة وحدة المساحة • فعزم القصور الذاتي حول محور يمر من مركـز القرص وعمودي على وجهـه المستوى (الشكل ٨ ــ ٥) عندئذ يكون ـ

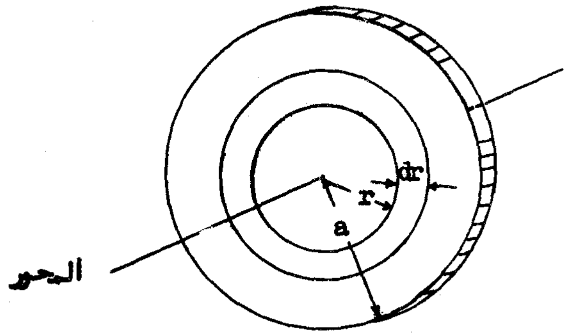
$$I = \int_0^a \rho \, (r^2)(2\pi r \, dr) = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} = \tfrac{1}{2} ma^2 \qquad (٨ــ٣٣)$$

والخطوة الاخيرة تنتـج من العلاقـة $m = \rho\pi a^2$ •

من الواضح ، ان المعادلة (٨ ــ٣٣) تستخدم كذلك لاسطوانة دائرية قائمـة منتظمـة نصف قطرها a وكتلتها m ، والمحور هو المحور المركزي للاسطوانـة •

الكـرة

لنجد عـزم القصور الذاتي لكرة صلدة منتظمة نصف قطرها a وكتلتها m حـول محور (المحور ــ z) يمر من مركزها • سوف نقسم الكرة الى اقراص دائرية رقيقـة ،

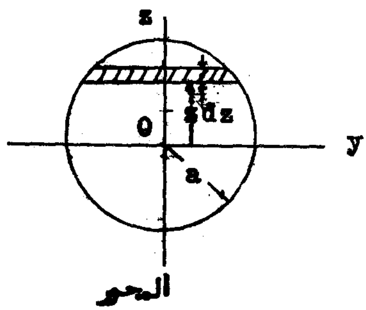


الشـــكل (٨ ـ ٥)

المحاور لايجاد عــزم القصور الذاتي للقرص

كما هو مبين في الشكل (٨ ـ ٦) من المعادلة (٨ ـ ٣٣) يكون عــزم القصور الذاتي لهذا القرص النموذجي الذى نصف قطره y هو $\frac{1}{2}y^2\,dm$ ولكن $dm = y^2 dz\,\rho\pi$ اذن

$$I = \int_{-a}^{a} \rho\,\tfrac{1}{2}\pi y^4\,dz = \int_{-a}^{a} \tfrac{1}{2}\pi\rho(a^2-z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \quad (٨ ـ ٣٤)$$



الشـــكل (٨ ـ ٦)

المحاور لايجاد عــزم القصور الذاتي لكرة حول المحور ـ z

على الطالب استنتاج الخطوة الاخيرة. ولما كانت الكتلة m هي

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

اذ ن

$$I = \frac{2}{5} ma^2 \qquad (٨ــ ٣٥)$$

قشـرة كرويـة Spherical Shell

يمكن ايجاد عـزم القصور الذاتي لقشرة رقيقـة كرويـة منتظمـة بسهولة من تطبيـق المعادلة (٨ــ٣٤) • فاذا فاضلناها بالنسبة الى a نحصل على

$$\frac{8}{3} \pi \rho a^4 \, da$$

وهذه النتيجـة هي عـزم القصور الذاتي لقشرة سمكها da ونصف قطرهـا a •

ولما كانت كتلـة القشرة تساوى $4\pi a^2 \rho da$ اذ ن يمكننا كتابـة ــ

$$I = \frac{2}{3} ma^2 \qquad (٨ــ ٣٦)$$

لعـزم القصور الذاتي لقشرة رقيقـة نصف قطرها a وكتلتها m • وعلى الطالـب التحقق من صحة هذه النتيجـة بالتكامل المباشر •

نظرية المحاور المتعامدة Perpendicular-axis Theorem

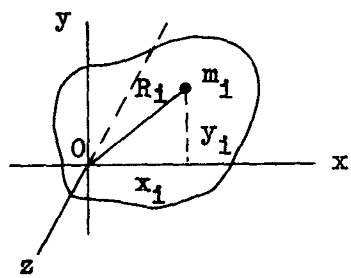
افرض ان جسمًا صلدًا على شكل صفيحة رقيقـة مستوية اعتباطية الشكل • لنضع هـذه الصفيحة في المستوى ــ xy (الشكل ٨ ــ ٧) • فعـزم القصور الذاتي حـول المحور ــ z اذ ن يكون

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

ولكن المجموع $\sum_i m_i x_i^2$ هو عـزم القصور الذاتي I_y حول المحور ــ y • لان z_i يساوى صفرا لجميع الجسيمات • وبالتماثل $\sum_i m_i y_i^2$ يمثل عـزم القصـور الذاتي I_x حول المحور ــ x • اذ ن يمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي ــ

$$I_z = I_x + I_y \qquad (٨ــ ٣٧)$$

هذه هي نظرية المحاور المتعامدة ٠ اى ان عـزم القصور الذاتي لاى صفيحة مستويـة حول محور عمودى على سطحها يساوى مجموع عزمي القصور الذاتي حول اى محوريـن متعامدين يقعان في مستوى الصفيحة ويمران بالمحور العمودى ٠



الشكل (٨ ـ ٧)

نظرية المحاور المتعامـدة

كمثال لاستخدام هذه النظرية ، لنفرض قرصا دائريا رقيقا في المسـتوى ـ xy (الشكل ـ ٨ ـ ٨) من المعادلة (٨ ـ ٣٣) عندنا ـ

$$I_z = \tfrac{1}{2} ma^2 = I_x + I_y$$

ولكن هذه الحالة نعرف ان $I_x = I_y$ من التناظر ٠ اذن يجب ان نحصل علـى ـ

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4} ma^2 \qquad (٨ ـ ٣٨)$$

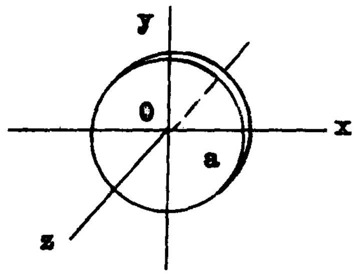
لعزم القصور الذاتي حول اى محور في مستوى القرص ويمر من مركزه ٠ والمعادلـة (٣ ـ ٣٨) يمكن استنباطها ايضا من التكامل المباشر ٠

نظرية المحاور المتوازيـة Parallel-axis Theorem

افرض معادلة القصور الذاتي حول اى محور كالمحور ـ z

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

يمكننا الآن التعبير عن x_i و y_i بدلالة احداثيات مركز الكتلة



الشكل (٨ ـ ٨)

(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) والاحداثيات ($\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$) بالنسبة الى مركز الكتلة (الشكل ٨ ـ ٩) كما يلي ـ

$$x_i = x_{cm} + \bar{x}_i \qquad y_i = y_{cm} + \bar{y}_i \qquad (٨ ـ ٣٩)$$

بعد التعويض وتجميع الحدود نحصل على

$$I = \sum_i m_i(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) + \sum_i m_i(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \qquad (٨ ـ ٤٠)$$

$$+ 2x_{cm} \sum_i m_i\bar{x}_i + 2y_{cm} \sum_i m_i\bar{y}_i$$

المجموع الاول من اليمين هو عزم القصور الذاتي حول محور مواز للمحور ـ z ويمر في مركز الكتلة · سنسميه I_{cm} · من الواضح ان المجموع الثاني يساوي كتلة الجسم مضروبة في مربع المسافة بين مركز الكتلة والمحور ـ z · ولنسم هذه المسافة ℓ ·

اى ان $\ell^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$

من تعريف مركز الكتلة عندنا

$$\sum_i m_i\bar{x}_i = \sum_i m_i\bar{y}_i = 0$$

اذن ، المجموعان الاخيران في يمين المعادلة(٨ ـ ٤٠) يتلاشيان والنتيجة الاخيرة تكتب على النحو التالي ـ

$$I = I_{cm} + m\ell^2 \qquad (٨ ـ ٤١)$$

هذه هي نظرية المحاور المتوازية ، والتي يمكن تطبيقها على اى جسم صلد ، مجسم اوصفيحة ، وتنص النظرية في الواقع على ان عزم القصور الذاتي للجسم الصلد حول اى محور يساوى عزم القصور الذاتي حول محور مواز له ويمر من مركز الكتلة زائداً حاصل ضرب كتلة الجسم في مربع المسافة بين المحورين .

وعند تطبيق النظرية السابقة على القرص الدائرى ، نحصل من المعادلتين (٨ ـ ٣٣) و (٨ ـ ٤١) على

$$I = \tfrac{1}{2}\, ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2}\, ma^2 \qquad (٨ ـ ٤٢)$$

لعزم القصور الذاتي لقرص دائرى منتظم حول محور عمودى على سطح القرص ويمر من حافته . اضف الى ذلك ، من المعادلتين (٨ ـ ٣٩) و (٨ ـ ٤١) نجد ان

$$I = \tfrac{1}{4} ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4}\, ma^2 \qquad (٨ ـ ٤٣)$$

لعزم القصور الذاتي حول محور واقع في مستوى القرص ومماس لحافته .

نصف قطر التدويم Radius of Gyration

من الملائم ، لبعض الاغراض ، التعبير عن عزم القصور الذاتي للجسم الصلد بدلالة المسافة k والتي تسمى بنصف قطر التدويم ، حيث k يعرف بالمعادلة التالية ـ

$$I = mk^2 \qquad (٨ ـ ٤٤)$$

او

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

فعلى سبيل المثال ، ان نصف قطر التدويم لقضيب دقيق حول محور يمر من احد طرفيه [بالرجوع للمعادلة (٨ ـ ٣٠)] هو ـ

$$k = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{3}\, ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ويمكن ترتيب عـزوم القصور الذاتيه لاجسام مختلفة بسهولة على صورة جدول وذلـك بدرج مربع انصاف اقطار التدويـم لها كما هو في الجدول (٨ ـ ١)

جـدول رقم (٨ ـ ١)

قيـم k^2 لمختلف الاجسـام

(عـزم القصور الذاتي = الكتلة × k^2)

الجسـم	المحـور	k^2
قضيب رفيـع طولـه a	عمودى على القضيب ويمر من مركـزه	$\frac{a^2}{12}$
	عمودى على القضيب ويمر من احد طرفيه	$\frac{a^2}{3}$
صفيحه رقيقه متوازية الاضلاع ، ضلعاها a و b	يمر من المركز ومواز للضلـع b	$\frac{a^2}{12}$
	يمر من المركز وعمودى على الصفيحه	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
قرص دائرى رقيق نصف قطـره a	يمر من المركز وواقع في مستوى القرص	$\frac{a^2}{4}$
	يمر من المركز وعمودى على القـرص	$\frac{a^2}{2}$
حلقة رفيعه نصـف قطرها a	يمر من المركز وواقع في مستوى الحلقة	$\frac{a^2}{2}$
	يمر من المركز وعمودى على سطحها	a^2
قشرة اسطوانية رقيقه نصف قطرها a وطولها b	محورها الطولي المركـزى	a^2

اسطوانه دائريه قائمـه	محورها الطولي المركزى	$\frac{a^2}{2}$
صلده نصف قطرهـــا a وطولهـا b	يمر من مركزها وعمودى على محورها الطولـي المركـــزى	$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$
قشرة كروية نصف قطرها a	اى قطـر	$\frac{2}{3} a^2$
كرة صلده منتظمـــة نصف قطرهـا a	اى قطـــر	$\frac{2}{5} a^2$
متوازى المستطيلات منتظم صلد ، اضلاعـــــه a ، b ، c	يمر من المركز وعمودى على الوجه ab ،وهو موازٍ للحافـــه c	$\frac{a^2 + b^2}{12}$

٨ ـ٥) البندول الفيزيائي The Physical Pendulum

الجسم الصلد الذى يتأرجح بحرية تحت تأثير ثقلـه حول محور افقي ثابت للدوران يسمى بالبندول الفيزيائي إو البندول المركـــــب Compound Pendulum .

والشكل (٨ ـ١٠) يبين بندول فيزيائي ، فيـه O تمثل موضع محور الدوران ،و CM مركز كتلتـه . والمسافة بين O و CM هي ℓ كما هو موضح .

ويتمثيل الزاوية بين الخط OCM والخط الشاقولي OA بالرمز θ يكـــون مقدار عـزم القوة التثاقلية (تعمل في CM) حول محور الدوران على النحو التالـي

$$mg\ell \sin \theta$$

معادلة الحركة الاساسية

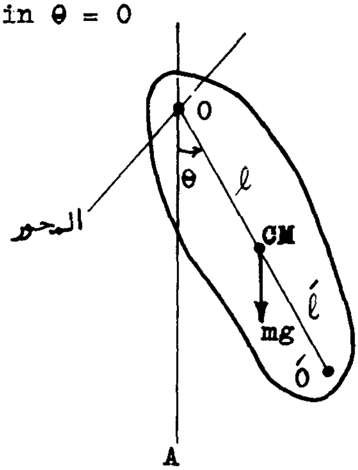
$$\frac{dL}{dt} = I\dot{\omega}$$

عندئذ تأخذ الشكل التالي

$$-mg\ell \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

او

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I} \sin\theta = 0 \qquad (٨ - ٤٥)$$



الشكل (٨ ــ ١٠)

البنـــدول الفيزيائــــي

هذه المعادلة تماثل معادلة البندول البسيط بالشكل ، وكما هي الحالــة فــــي البندول البسيط، يمكننا هنا الاستعاضة عن $\sin\theta$ بالزاوية θ لذبذبات صغيرة ، اى

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I} \theta = 0 \qquad (٨ - ٤٦)$$

وحلها هــو

$$\theta = \theta_0 \cos(2\pi ft + \epsilon) \qquad (٨ - ٤٧)$$

حيث θ_0 هي السعة و ϵ زاوية الطور، وتردد التذبذب f يكــون

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg\ell}{I}} \qquad (٨ - ٤٨)$$

اذن ، زمن الذبذبة هو

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \tag{٨ـ ٤٩}$$

(لتلافي الارباك الذى قد يحصل ، سوف لانستعمل رمزا معينا لتسمية التردد الزاوى $2\pi f$) ، ويمكننا كذلك التعبير عن زمن الذبذبة بدلالة نصف قطر التدويم k اى

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g\ell}} \tag{٨ـ ٥٠}$$

فزمن الذبذبة اذن هو نفس زمن ذبذبة بندول بسيط طوله k^2/ℓ.

وعلى سبيل المثال ، قضيب رفيع منتظم طوله a يتأرجح كبندول فيزياشي حول احد طرفيه ($k^2 = a^2/3$) بزمن ذبذبة مقداره

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

مركز التذبذب Center of Oscillation

باستخدام نظرية المحاور المتوازية ، يمكننا التعبير عن نصف قطر التدويم k بدلالة نصف قطر التدويم حول مركز الكتلة k_{cm} كما يلي

$$I = I_{cm} + m\ell^2$$

او

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + m\ell^2$$

وعند اختصار m's من كل حد نحصل على

$$k^2 = k_{cm}^2 + \ell^2 \tag{٨ـ ٥١}$$

اذن يمكن كتابة المعادلة (٨ـ ٥٠) على النحو التالي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + \ell^2}{g\ell}} \tag{٨ـ ٥٢}$$

افرض ان محور دوران بندول فيزيائي قد ازيح الى موضع آخر O' وعلى مسافة ℓ' من مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٨ ــ ١٠) . فزمن الذبذبة T' حول هذا المحور الجديد يكون

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{k_{cm}^2 + \ell'^2}{g\ell'}}$$

نستنتج من ذلك ان زمني التذبذب حول O وحول O' سيكونان متساويين ، اذا كان

$$\frac{k_{cm}^2 + \ell^2}{\ell} = \frac{k_{cm}^2 + \ell'^2}{\ell'}$$

والمعادلة السابقة تبسط بسهولة الى

$$\ell\ell' = k_{cm}^2 \qquad (٨ ــ ٥٣)$$

فالنقطة O' التي ترتبط بالنقطة O بالمعادلة السابقة تسمى بمركز التذبذب للنقطة O .

وواضح ان O هي ايضا مركز تذبذب للنقطة O' . اذن لقضيب طوله a يتأرجح حول طرف واحد يكون $\ell = a/2$, $k_{cm}^2 = a^2/12$. لذا من المعادلة (٨ ــ ٥٣) ، $\ell' = a/6$ ، ولذلك سيكون للقضيب الذى يتأرجح حول محور يبعد مسافة $a/6$ من المركز، نفس زمن الذبذبة ، فيما لو مر المحور من احد طرفيه .

٨ ــ ٦) نظرية عامة تتعلق بالزخم الزاوى

A General Theorem Concerning Angular Momentum

لاجل دراسة الحالة الاكثر عمومية لحركة الجسيم الصلد ، اى التي يكون فيها محور الدوران غير ثابت ، نحتاج الى استنباط نظرية اساسية للزخم الزاوى. رأينا في البند (٧ ــ ٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى لأية منظومة يساوى العزم المسلط عليها ، اى

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٨ ــ ٥٤)$$

اوعلى نحو واضح

$$\frac{d}{dt}\sum_i(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \sum_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \qquad (٥٥ - ٨)$$

حيث نسبت جميع كميات المعادلة المذكورة اعلاه الى محاور نيوتونية ٠

لندخل الآن مركز الكتلة وذلك بالتعبير عن متجه الموضع لكل جسيم $\vec{r}_i$ بدلالة موضع مركز الكتلة $\vec{r}_{cm}$ ومتجه موضع الجسيم i بالنسبة الى مركز الكتلة $\vec{\bar{r}}_i$ (كما في البند ٧ ـ ٣)، هو

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i$$

و

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\bar{v}}_i$$

عندئذ المعادلة (٨ ـ٥٥) تصبح

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left[(\vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i) \times m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{\bar{v}}_i)\right] = \sum_i(\vec{r}_{cm}+\vec{\bar{r}}_i) \times \vec{F}_i \qquad (٥٦ - ٨)$$

وعندئذ الحدود واستخدام حقيقة كون تلاشي الكميتين $\sum m_i\vec{\bar{r}}_i$ ، $\sum m_i\vec{\bar{v}}_i$
نجد ان المعادلة (٨ ـ ٥٦) تبسط الى

$$\vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i\vec{a}_{cm} + \frac{d}{dt}\sum_i \vec{\bar{r}}_i \times m_i\vec{\bar{v}}_i = \vec{r}_{cm} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{\bar{r}}_i \times \vec{F}_i \qquad (٥٧ - ٨)$$

حيث

$$\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{v}}_{cm}$$

رأينا في البند (٧ ـ١) ان الحركة الانتقالية لمركز كتلة اية منظومة من الجسيمات تخضع للمعادلة

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i = m\vec{a}_{cm} \qquad (٥٨ - ٨)$$

لذلك يختصر الحد الاول من يسار المعادلة (٨ ـ٥٧) مع الحد الاول من يمينها ٠
والنتيجة النهائية تكون

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{\bar{r}}_i \times m_i\vec{\bar{v}}_i = \sum_i \vec{\bar{r}}_i \times \vec{F}_i \qquad (٥٩ - ٨)$$

والمجموع في يسار المعادلة المذكورة اعلاه عبارة عن الزخم الزاوى للمنظومة حول مركز الكتلة ، والمجموع على يمينها هو العزم الكلي لجميع القوى الخارجية حول مركز الكتلة . وعند تسمية هاتين الكميتين $\vec{L}$ و $\vec{N}$ على التتالي ، نحصل على

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (٨ـ٦٠)$$

هذه النتيجة المهمة تنص على ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوى حول مركز الكتلة لاى منظومة يساوى العزم الكلي للقوة الخارجية حول مركز الكتلة . وتكون هذه صحيحة حتى لو كان مركز الكتلة يتحرك بتعجيل . واذا اخترنا اية نقطة اخرى عدا مركز الكتلة كنقطة مرجعية ، عندئذ يجب ان تكون هذه النقطة في حالة سكون في نظام المحاور النيوتونية (باستثناء حالات خاصة معينة فسوف لن نحاول شرحها) وسنعطي مثالا لاستخدام النظرية المذكورة اعلاه في البند ٨ ــ ٨ .

٨ ــ ٧) الحركة الصفائحية للجسم الصلد

Laminar Motion of a Rigid Body

اذا كانت حركة الجسم بحيث تتحرك جميع جسيماته بموازاة لمستو ثابت ، عندئذ تسمى الحركة بالصفائحية Laminar . قد يغير محور الدوران موضعه في الحركة الصفائحية ولكن لايغير اتجاهه.الدوران حول محور ثابت هو حالة خاصة للحركة الصفائحية . ان تدحرج اسطوانة على سطح مستو هو مثال آخر على الحركة الصفائحية .

اذا عانى جسم ازاحة صفائحية ، فهذه الازاحة يمكن وصفها كما يلي : اختر نقطة مرجعية في الجسم ، كمركز الكتلة مثلا . فالنقطة المرجعية ستعاني ازاحة ما مثل $\Delta\vec{r}$ ، بالاضافة الى دوران الجسم حول النقطة المرجعية خلال زاوية ما مثل $\Delta\phi$. وهكذا يمكن وصف اية ازاحة صفائحية وصفا كاملا . ووفقا لذلك يمكن وصف الحركة الصفائحية وصفا كاملا عندما تعطى السرعة الانتقالية لنقطة مرجعية ملائمة مع السرعة الزاوية .

المعادلة الاساسية التي تتحكم في حركة الجسم الصلد الانتقالية هي ــ

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_{cm} = m\dot{\vec{v}}_{cm} = m\vec{a}_{cm} \quad (٨ــ ٦١)$$

حيث $\vec{F}$ تمثل مجموع جميع القوى الخارجية التي توءثر على الجسم ، m الكتلة ، $\vec{a}_{cm}$ تعجيل مركز الكتلة ٠

ينتج من تطبيق المعادلة (٨ ــ ٢٥) لحالة حركة الجسم الصلد الصفائحية ان

$$\bar{L} = I_{cm}\omega \quad (٨ــ ٦٢)$$

لمقدار الزخم الزاوى حول محور C يمر من مركز الكتلة ، حيث ω هي الانطلاق الزاوى للدوران حول ذلك المحور ٠ فالمعادلة الاساسية التي تتحكم في دوران الجسم ، اى المعادلة (٨ ــ ٦٠) عندئذ تصبح

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = I_{cm}\dot{\omega} = \bar{N} \quad (٨ــ ٦٣)$$

حيث $\bar{N}$ يمثل العزم الكلي للقوى المسلطة حول المحور C ٠

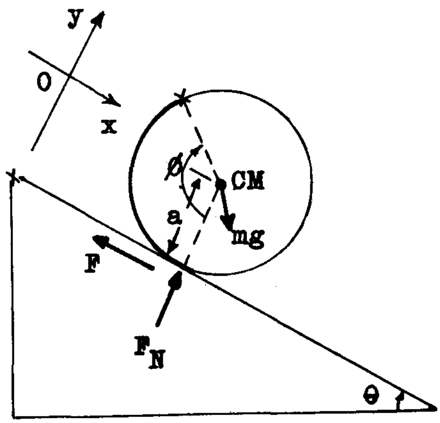
٨ ــ ٨) جسم يتدحرج اسفل مستوى مائل

Body Rolling Down an Inclined Plane

كتوضيح للحركة الصفائحية ، سندرس حركة جسم مستدير (اسطوانة ، كرة ، وما الى ذلك) يتدحرج اسفل سطح مائل ٠ الشكل (٨ ــ ١١) يبين ثلاث قوى توءثر على الجسم وهي (١) قوة الجاذبية التي توءثر شاقوليا الى الاسفل (٢) رد الفعل العمودى للسطح $\vec{F}_N$ و(٣) قوة الاحتكاك $\vec{F}$ الموازية للسطح ٠ وباختيار المحاور كما هو مبين في الشكل تكون معادلات مركبات حركة مركز الكتلة الانتقالية

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - F \quad (٨ــ ٦٤)$$

$$m\ddot{y}_{cm} = -mg \cos \theta + F_N \quad (٨ــ ٦٥)$$



الشكل (٨ــ١١)

جسم يتدحرج اسفل سطح مائــــل

حيث Θ تمثل زاوية ميل السطح عن الافق ، ولما كان الجسم يبقى ملامســـا للسطح ، عندئذ

$$y_{cm} = \text{constant}$$

اى

$$\ddot{y}_{cm} = 0$$

اذن من المعادلة (٨ــ٦٥) ، نحصل على

$$F_N = mg \cos \Theta \qquad (٨ــ٦٦)$$

ان القوة الوحيدة التي تسلط عزمـا حول مركز الكتلة هي قوة الاحتكـــاك $\vec{F}$. ومقدار هذا العزم يساوى Fa حيث a تمثل نصف قطر الجسم . المعادلـــة الدورانية اى المعادلة (٨ــ ٦٣) ، تصبح اذن

$$I_{cm}\ddot{\omega} = Fa \qquad (٨ــ٦٧)$$

ولشرح المسألة اكثر ، نحتاج الى وضع بعض الفرضيات بخصوص التلامس بين السطح والجسم . وسنحل معادلات الحركة لحالتين

الحركـة بدون انزلاق Motion with No Slipping

اذا كان التلامس خشنا تماما بحيث لايحدث انزلاق ، تكون عندنا العلاقـــات التاليـة

$$x_{cm} = a\phi$$
$$\dot{x}_{cm} = a\dot{\phi} = a\omega \qquad (٨ــ ٦٨)$$
$$\ddot{x}_{cm} = a\ddot{\phi} = a\dot{\omega}$$

حيث ϕ تمثل زاوية الدوران • عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٨ــ٦٧) على النحو التالي

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} = F \qquad (٨ــ ٦٩)$$

وبتعويض قيمة F المذكورة اعلاه في المعادلة (٨ــ٦٤) نحصل على

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm}$$

وعند حلها لـ $\ddot{x}_{cm}$ نجد ان

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg \sin\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g \sin\theta}{I + (k_{cm}^2/a^2)} \qquad (٨ــ٧٠)$$

حيــث k_{cm} يمثل نصف قطر التدويــم حول مركز الكتلة • فالجسم اذن يتدحرج اسفل السطح بتعجيل خطي ثابت وبتعجيل زاوى ثابت وفقا للمعادلة (٨ ــ ٦٨) فمثـــلا ، تعجيل اسطوانة منتظمة ($k_{cm}^2 = \frac{a^2}{2}$) يساوى

$$\frac{g \sin\theta}{I + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

بينما الكرة المنتظمة ($k_{cm}^2 = 2a^2/5$) يساوى

$$\frac{g \sin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin\theta$$

فرضيات الطاقـــة Energy Considerations

يمكن استنباط النتيجة السابقة ايضا من فرضيات الطاقة • في مجال الجاذبيـــة المنتظم ، الطاقة الكامنة V للجسم الصلد تساوى مجموع الطاقات الكامنة لجسيماته ،

اى ان

$$V = \sum (m_i g z_i) = mgz_{cm}$$

حيث z_{cm} هي المسافة العمودية من مركز الكتلة الى مستوى مرجعي (اعتباطـــي) ٠

الآن اذا كانت القوى ، باستثناء قوة الجاذبية ، التي تؤثر على الجسم لاتنجز شغلا ، عندئذ تكون الحركة محافظة ويمكننا كتابة

$$T + V = T + mgz_{cm} = E = \text{constant}$$

حيث T تمثل الطاقـــة الحركيـــة

وفي حالة الجسم الذى يتدحرج اسفل السطح المائل ، الشكل ٨ ـــ ١١ ، الطاقـــة الحركية للحركة الانتقالية تساوى $\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2$ وللحركة الدورانيـــة تســـاوى $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ اى ان معادلة الطاقة تصبح

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz_{cm} = E$$

ولكن $z_{cm} = -x_{cm}\sin\theta, \omega = \dot{x}_{cm}/a$ اذن

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}mk_{cm}^2\frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - mgx_{cm}\sin\theta = E$$

وبتفاضلها بالنسبة للزمن t وتجميع الحدود نحصل على ـــ

$$m\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}^2}{a^2}\right) - mg\dot{x}_{cm}\sin\theta = 0$$

وباختصار العامل المشترك $\dot{x}_{cm}$ (طبعا على فرض ان $\dot{x}_{cm} \neq 0$) وحلها لـ $\ddot{x}_{cm}$ نحصل على نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا باستخدام القوى والعزوم٠

* حدوث انـزلاق Occurrence of Slipping

لنفرض الآن ، الحالة التي يكون فيها التلامس مع السطح غير تام الخشونة اى ان هناك معاملا للاحتكاك الانزلاقي معينا مقداره μ ٠ فاذا حدث انزلاق يكون مقدار قـــوة الاحتكاك $\vec{F}$ عندئذ كالاتي

$$F = F_{max} = \mu F_N = \mu mg \cos \theta \qquad (٨ - ٧١)$$

ومعادلة الحركة الانتقالية (٨ - ٦٤) تصبح

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \qquad (٨ - ٧٢)$$

ومعادلة الحركة الدورانية (٨ - ٦٧) ، تكون

$$I_{cm} \dot{\omega} = \mu mga \cos \theta \qquad (٨ - ٧٣)$$

من المعادلة (٨ - ٧٢) نرى مرة ثانية ان مركز الكتلة يتحرك بتعجيل ثابت وهو

$$\ddot{x}_{cm} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \qquad (٨ - ٧٤)$$

وفي الوقت نفسه يكون التعجيل الزاوى ثابتا :

$$\dot{\omega} = \frac{\mu mga \cos \theta}{I_{cm}} = \frac{\mu ga \cos \theta}{k_{cm}^2} \qquad (٨ - ٧٥)$$

لنكامل هاتين المعادلتين بالنسبة للزمن t ، على فرض ان الجسم يبدأ من السكون، اى عندما $\dot{\phi}=0,\ \dot{x}_{cm}=0,\ t=0$ ، نحصل على

$$\dot{x}_{cm} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)t \qquad (٨ - ٧٦)$$
$$\omega = \dot{\phi} = g(\mu a \cos \theta / k_{cm}^2)t$$

ووفقا لذلك ، النسبة بين الانطلاق الخطي والزاوى تكون ثابتة ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a \omega$$

حيث

$$\gamma = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\mu a^2 \cos \theta / k_{cm}^2} = \frac{k_{cm}^2}{a^2}\left(\frac{\tan \theta}{\mu} - 1\right) \qquad (٨ - ٧٧)$$

ولكن $a\omega$ لايمكن ان تكون اكبر من $\dot{x}_{cm}$ ، لذلك γ لايمكن ان تكون اقل من واحد ، عندما يكون هناك تدحرج فقط (نقي) اى في الحالة المحدده ، تعطى من $\dot{x}_{cm} = a\omega$ ، اى ان

$$\gamma = 1$$

عند حل المعادلة (٨ ـ ٧٧) للعامل μ مع ١ = γ ، نجد ان قيمـــــة μ الحرجة تكون

$$\mu_{crit} = \frac{\tan \theta}{1 + (a/k_{cm})^2} \qquad (٨ - ٧٨)$$

اذا كانت μ اكبر من المقدار المذكور اعلاه ، عندئذ يتدحرج الجسم بدون انزلاق . فمثلا ، اذا وضعت كرة على سطح ميله ٤٥° ستدحرج بدون انزلاق على ان تكـــون μ اكبر مـــن $\tan 45°/(1+\frac{5}{2})$ أو $2/7$

٨ ـ ٩) حركة جسم صلد تحت تأثير قوة دافعة
Motion of a Rigid Body Under an Impulsive Force

في الفصل السابق ادخلنا مفهوم القوة الدافعة Impulsive Force التـــي تؤثر على جسيم . وجدنا ان تأثير هذه القوة ، او الدفع ، هو احداث تغير مفاجيء في سرعة الجسيم . وفي هذا البند سوف نتوسع في مفهوم الدفع لحالة الحركة الصفائحيـة لجسم صلد ممتد .

الحركـة الحـرة Free Motion

افرض ان جسما حر الحركة في مستو وقد سلط عليه دفع مثل $\hat{\vec{P}}$. عندئـــذ ، علينا اخذ كل من الحركة الانتقالية والدورانية وفقا للنظرية العامة التي بحثت في البنـد (٨ ـ ٧) ، اولا ، الحركة الانتقالية تعطى بالعلاقة العامة التالية

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}_{cm}$$

اذا كانت نوعية القوة $\vec{F}$ دافعة ، فنحصل على

$$\int \vec{F}\, dt = \hat{\vec{P}} = m \,\Delta \vec{v}_{cm}$$

اذن ينتج بسبب الدفع تغير في سرعة مركز الكتلة مقداره

$$\Delta\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}}}{m} \qquad (٨ - ٧٩)$$

ثانيا ، دوران الجسم تتحكم فيـه المعادلة التالية

$$N = \dot{L} = I_{cm}\dot{\omega}$$

ويمكننا التكامل بالنسبة للزمن t للحصول على العلاقة التالية

$$\int N\,dt = I_{cm}\Delta\omega \qquad (٨-٨٠)$$

ونسمي التكامل $\int N\,dt$ بالدفع الدوراني ، ولنستخدم الرمز $\hat{L}$ للاشارة اليـــه ، تأثير الدفع الدوراني عندئذ ، هو تغير سرعة الجسم الزاوية بالمقدار

$$\Delta\omega = \frac{\hat{L}}{I_{cm}} \qquad (٨-٨١)$$

واذا سلط الدفع الاولي $\hat{P}$. على الجسم بحيث يكون خط تأثيره على بعد b من مركز الكتلة ، فالعـــزم عندئذ يساوى $N=Fb$ ووفقا لذلك

$$\hat{L} = \hat{P}b \qquad (٨-٨٢)$$

ويمكننا عندئذ التعبير عن التغيير في السرعة الزاوية الناتجة عن الدفع كما يلي

$$\Delta\omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \qquad (٨-٨٣)$$

والخلاصة ــ تاثير الدفع على جسم صلد حر الحركة في حركة صفائحية هو (١) احـداث تغير مفاجيء في سرعة مركز الكتلة ــ التاثير الانتقالي و (٢) احداث تغيير مفاجيء في سرعة الجسم الزاوية ــ التاثير الدوراني ·

الحركـة المقيـدة Constrained Motion

اذا سلط دفع على جسم غير حر الحركة ولكنـه مقيد ليدور حول محور ثابت لـــه ، نحتاج ان ناخذ بعين الاعتبار الشرط الدوراني فقط $N=I\dot{\omega}$ ، اذن

$$\int \vec{N}\,dt = \hat{L} = I\Delta\omega$$

في المعادلة المذكورة اعلاه ، I يمثل عـزم القصور الذاتي حول المحور الثابـــــت للدوران ، و $\vec{N}$ هو العـــزم حول ذلك المحور · وفي هذه الحالة ، الدفع الدوراني $\hat{L}$ الذى ينتج عن دفع اولي منفرد $\hat{P}$ يقع خط تاثيره على مسافة b من محــــور

الدوران يعطى ايضا من

$$\hat{L} = \hat{P}b$$

بحيث

$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}b}{I} \qquad (٨ \_ ٨٤)$$

يمثل التغير في السرعة الزاوية حول محور الدوران الثابت •

تاثير عدة دفوع أنية
Effect of Several Simultaneous Impulses

اذا سلطت عدة دفوع مختلفة على جسم صلد في وقت واحد ، فمحصلة التغيير في سرعة مركز الكتلة والسرعة الزاوية للجسم تنتج من جمع الدفوع والعزوم كما يجب على التالي• اذن ، نحصل على التاثير الانتقالي لعدد من الدفوع من الجمع الاتجاهي الفردى لها ، اى ان المعادلة (٨ ــ ٧٩) تصبح

$$\Delta\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}}_1 + \hat{\vec{P}}_2 + \cdots}{m} \qquad (٨ \_ ٨٥)$$

وبالتماثل ، للتاثير الدوراني ، بعد تحوير المعادلة (٨ ــ ٨٣) نحصل على

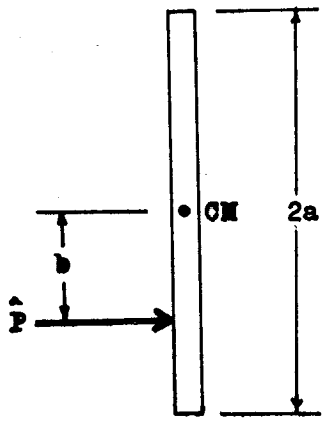
$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}_1 b_1 + \hat{P}_2 b_2 + \cdots}{I_{cm}} \qquad (٨ \_ ٨٦)$$

في حالة جسم حركتــه مقيدة حول محور ثابت يوجد دفع ثانوى ناشيء عن رد فعــل المحور على الجسم متى ما سلط دفع خارجي • عندئذ تستنبط الحركة من مجموع جميــع الدفوع وفقا للمعادلات المذكورة اعلاه •

أمثلـــة

١ ــ دفع مسلط على قضيب حركتــه حرة Impulse Applied to a Free Rod

كتوضيح للنظرية المذكورة اعلاه ، افرض ان قضيبا يتزلق بحرية على سطح افقــي املس • وقد سلط دفع $\hat{P}$ باتجاه عمودى على طول القضيب وعلى مسافة b من مركــز كتلتــه ، كما هو مبين في الشكل (٨ــ١٢) •



الشكل (٨ ـ ١٢)
دفع مسلط على قضيب حركته حره

اذا كان القضيب في البداية ساكنا ، عندئذ تكون معادلتا الحركة الانتقالية والدورانية على التالي ـ

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}}}{m} \qquad (٨ ـ ٨٧)$$

$$\omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \qquad (٨ ـ ٨٨)$$

وبصورة خاصة اذا كان القضيب منتظما وطوله يساوى $2a$ ، عندئذ $I_{cm}=ma^2/3$ ووفقا لذلك ـ

$$\omega = \hat{P}\,\frac{3b}{ma^2} \qquad (٨ ـ ٨٩)$$

ولذلك تكون السرعة التي تعطى لمركز الكتلة هي نفسها بغض النظر عن نقطة تأثير الدفع . بينما تعتمد السرعة الزاوية التي يكتسبها القضيب على موضع الدفع المسلط. ونرى ايضا ، ان الطاقة الحركية النهائية للقضيب هي

$$T = \tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{3\hat{P}^2}{2m}\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

وواضح ان هذا يعتمد على النقطة التي يسلط فيها الدفع .

٢ـ دفع مسلط على قضيب مقيد ليدور حول محور ثابت

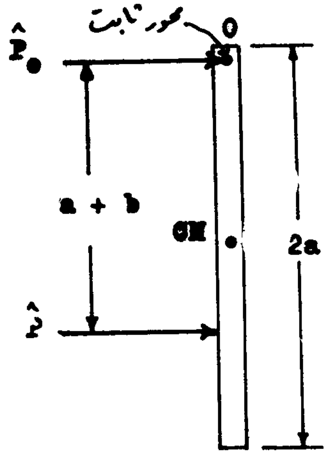
Impulse Applied to a Rod Constrained to Rotate about a Fixed Axis

لنفرض بعد ذلك الحالة التي يكون فيها القضيب نفسه مقيداً ليدور حول محور ثابت. افرض ان موضع المحور O في احد طرفي القضيب كما هو مبين في الشكل (٨ ــ ١٣) . في هذه الحالة نجد ان معادلة الحركة الدورانية تكون على النحو التالي

$$L = \hat{P}(a + b) = I_0 \omega \qquad (٨ــ٩٠)$$

عندئذ ، لما كان $I_0 = \left(\frac{4}{3}\right)ma^2$ ، نحصل على

$$\omega = \hat{P}\,\frac{3(a+b)}{4ma^2} \qquad (٨ــ٩١)$$



الشكل (٨ــ١٣)

دفع $\hat{P}$ مسلط على قضيب مقيد ليدور حول احد طرفيه .

$\hat{P}_0$ هو رد فعل الدفع في المحور

للسرعة الزاوية التي يكتسبها القضيب . والآن ، لما كان القضيب يدور حول النقطة O ، فمركز الكتلة يتحرك بانطلاق مقداره

$$v_{cm} = a\omega$$

او

$$v_{cm} = \hat{P}\,\frac{3(a + b)}{4\ ma}$$

نلاحظ ان هذه لاتساوي $\hat{P}/m$. وللنظرة الاولى قد تظهر هذه النتيجة مناقضة للمعادلة

العامة للحركة الانتقالية ، المعادلة (٨ ـ ٧٩) ، وفي الحقيقة . لايوجد هنـــاك تناقض ، لانـه يوجد دفع آخر يعمل على القضيب في الوقت نفسه كدفع اولى . وهـــذا الدفع الثاني هو دفع رد الفعل الذى يسلطـه المحور في O على القضيب. ولنسـم دفع رد الفعل هذا $\hat{\vec{P}}_o$. عندئذ يكون الدفع الكلي المسلط على القضيب هو المجموع الاتجاهي $\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o$. ووفقا لذلك تكون السرعة التي يكتسبها مركز الكتلـة هي ـ

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o}{m} \qquad (٨ ـ ٩٣)$$

ويمكننا الآن حساب قيمة $\hat{\vec{P}}_o$ باستعمال قيمة $\vec{v}_{cm}$ من المعادلة (٨ ـ ٩٢) . اذن

$$\hat{\vec{P}}\,\frac{3(a + b)}{4ma} = \frac{\hat{\vec{P}} + \hat{\vec{P}}_o}{m}$$

التي تعطي

$$\hat{\vec{P}}_o = \hat{\vec{P}}\,\frac{3b - a}{4a} \qquad (٨ ـ ٩٤)$$

للدفع الذى يكتسبه القضيب من المحور المقيد . من قانون الفعل ورد الفعل يكـــون $-\hat{\vec{P}}_o$ الدفع الذى يسلطـه القضيب على المحور في O .

علينا ملاحظـة ان دفع رد الفعل يتلاشى اذا اختيرت نقطة تاثير الدفع الاولـــى كما يجب . تسمى هذه النقطة بمركز الصدم center of percussion وفي حالة القضيب المذكور اعلاه تكون هذه النقطـة بحيث $b = a/3$

٨ ـ ١٠) تصادم الاجسام الصلده Collisions of Rigid Bodies

في المسائل التي تتضمن تصادم اجسام صلده ممتدة ، القوى التي توءثر بها الاجسام بعضها على بعض اثناء التلامس تكون دائما متساوية ومتعاكسه . اذن تصح قوانيـــن حفظ الزخم الخطي والزاوى . ان مفهومي الدفع الدوراني والخطي سيساعدان غالبـــا في مثل هذه المسائل .

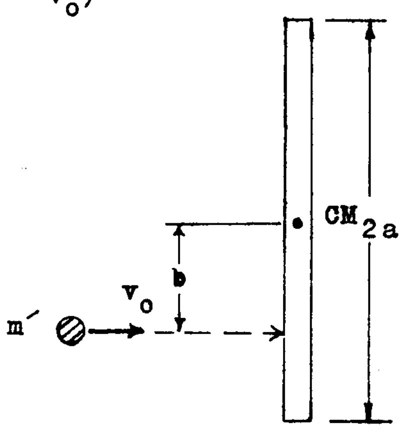
مثـــــــال

تصادم كـرة وقضيب

افرض "مثلا" تصادم كرة كتلتها m' بقضيب منتظم طوله $2a$ وكتلتـــــــه m.
ولنفرض ان القضيب في البداية كان ساكنا على سطح افقي املس ، كالسابق وان نقطـــة التصادم على مسافة b من مركز القضيب كما هو مبين في الشـــــكل (٨ ــ ١٤) ٠
ان المعادلتين (٨ ــ ٨٧) و (٨ ــ ٨٨) تعطيان حركة القضيب بعد التصادم بدلالـة الدفع $\vec{\hat{P}}$ الذى يكتسبه القضيب من الكرة ٠ نعلم ايضا ان الدفع الذى تتسلمه الكـــرة كنتيجة للدفع هو $-\vec{\hat{P}}$ ٠ لذلك يمكننا كتابة معادلات الحركة الانتقالية كما يلي

$$\vec{\hat{P}} = m\vec{v}_{cm} \tag{٨ــ٩٥}$$

$$-\vec{\hat{P}} = m'(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \tag{٨ــ٩٦}$$



الشكل (٨ ــ ١٤)

تصادم جسيم وقضيـــــب

حيث $\vec{v}_{cm}$ تمثل سرعة مركز كتلة القضيب بعد التصادم، $\vec{v}_0$ السرعة الابتدائية للكرة

قبل التصادم، و $\vec{v}_1$ السرعة النهائية للكرة . معادلتا الحركة الانتقالية يتضمنان حفظ الزخم الخطي لان عند حذف $\hat{\vec{P}}$ نحصل على ـ

$$m'\vec{v}_o = m'\vec{v}_1 + m\vec{v}_{cm} \qquad (٨ـ٩٧)$$

لاجل حساب دوران القضيب بعد التصادم، يمكننا استخدام قاعدة حفظ الزخم الزاوي . ان الزخم الزاوي الابتدائي للكرة حول مركز الكتلة هو $bm'v_o$ والزخم الزاوي النهائي هو $bm'v_1$. والزخم الزاوي الابتدائي للقضيب يساوي صفرا والزخم الزاوي النهائي يساوي $I_{cm}\omega$. اذن

$$bm'v_o = bm'v_1 + I_{cm}\omega \qquad (٨ـ٩٨)$$

ان معادلتي الانتقالية والدورانية المذكورتين اعلاه لاتعطيا لنا معلومات كافية لايجاد بورمترات السرع للحركة النهائية ، اى v_1 ، v_{cm} ، ω . فلاجل حساب الحركة النهائية بصورة كاملة ، نحتاج الى معادلة اخرى . قد تكون هذه معادلة توازن الطاقة .

$$\tfrac{1}{2}m'v_o^2 = \tfrac{1}{2}m'v_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2 + Q \qquad (٨ـ٩٩)$$

حيث Q تمثل الخسارة في الطاقة . وبطريقة اخرى ، يمكننا استخدام معادلة معامل الارتداد .

$$\epsilon = \frac{\text{انطلاق الاقتراب}}{\text{انطلاق الابتعاد}}$$

في المسألة تحت البحث ، عندنا v_o تساوى انطلاق الاقتراب .

لايجاد انطلاق الابتعاد ، نحتاج معرفة انطلاق القضيب في نقطة التلامس ، وهذا يعطي من مجموع الانطلاق الانتقالي لمركز الكتلة والانطلاق الدوراني لتلك النقطة بالنسبة للمركز . اذن انطلاق نقطة التلامس مباشرة بعد التصادم هو $v_{cm} + b\,\omega$.

وفقا لذلك يمكننا كتابة سرعة الابتعاد = $v_{cm} + b\omega - v_o$

اذن

$$\epsilon v_o = v_{cm} + b\omega - v_o$$

عندنا الآن معادلات كافية لحل الحركة النهائية . وعند تعويض $I_{cm} = ma^2/3$ ،

نحصل على

$$v_{cm} = v_o(\epsilon + 1)\left(\frac{m}{m'} + 3\frac{b^2}{a^2} + 1\right)^{-1}$$

$$v_1 = v_o - \frac{m}{m'} v_{cm} \qquad (٨\_١٠٠)$$

$$\omega = v_{cm}\left(\frac{3b}{a^2}\right)$$

وعلى القارىء تحقيق هذه النتيجة .

تمارين

٨_١ . جد مركز كتلة كل مما يأتي (آ) صفيحة رقيقة منتظمة شكلها ربع دائرة (ب) سلك دقيق حني بشكل ربع دائرة (جـ) مخروط صلد دائري قائم منتظم ارتفاعه h (د) المساحة المحددة بالقطع المكافىء $x^2 = by$ والمستقيم $y = b$ (هـ) الحجم المحدد بالقطع المكافىء المجسم $z=(x^2+y^2)/b$ والمستوى $z = b$.

٨_٢ . جد مركز كتلة ثمن قطع ناقص مجسم صلد منتظم انصاف محاوره a ، b ، c .

٨_٣ . جد مركز كتلة نصف كرة صلدة نصف قطرها a وكثافتها تتغير خطيا مع المسافة من المركز حيث تساوي صفرا في المركز و ρ_o خارجة .

٨_٤ . كرة منتظمة صلدة نصف قطرها a تحتوي على جوف كروي نصف قطره ($\frac{1}{2}a$) ومركزه في نقطة تبعد ($\frac{1}{2}a$) من مركز الكرة . جد مركز الكتلة .

٨_٥ . ماهي المسافة التي يصلها رجل وزنه W يصعد سلم طوله l ووزنه w قبل ان ينزلق . اذا كان السلم يستند الى جدار قائم خشن ؟ الزاوية بين السلم والارض تساوي θ . افرض ان معامل الاحتكاك μ هو نفسه بين السلم والحائط وبين السلم والارض .

٨ ــ ٠٦ سلك منتظم حني على شكل نصف دائرة وعلق على مسمار خشبي خشن ٠ فاذا كان الخط الواصل بين طرفي السلك يصنع زاوية θ مع الافق وكان السلك على حافة الانزلاق ٠ فما هو معامل الاحتكاك بين السلك والمسمار ؟

٨ ــ ٠٧ نصف كرة صلده منتظمة تستند الى حائط عمودى وهي على حافة التوازن فاذا كان الجزء المدور لنصف الكرة في تماس مع الحائط والارض ومعامل الاحتكاك μ هو نفسه للحائط والارض ٠ جد الزاوية بين الوجه المستوى لنصف الكرة والارض ٠

٨ ــ ٠٨ قشرة منتظمة بشكل نصف كرة تستند الى سطح خشن مائل بزاوية θ وهي على حافة التوازن ٠ فاذا كان الجانب المدور للقشرة يمس المستوى ومعامل الاحتكاك يساوى μ ٠ جد ميلان القشرة ٠

٨ ــ ٠٩ اذا اثرت مجموعة القوى $(F_1, F_2, \ldots)$ على جسم صلد وكان (آ) في حالة توازن انتقالي و (ب) في حالة توازن دوراني حول نقطة ما مثل O ٠ برهن ان مجموعة القوى هذه تكون ايضا في حالة توازن دوراني حول اى نقطة اخرى مثل O' ٠

٨ ــ ٠١٠ إثبت ان عزوم القصور الذاتي لمتوازي مستطيلات صلد منتظم ، قطع ناقص اسطواني ، قطع ناقص مجسم ، هي $\frac{m}{3}(a^2 + b^2)$ ، $\frac{m}{4}(a^2 + b^2)$ ، $\frac{m}{5}(a^2+b^2)$ على التتالي ، حيث m تمثل الكتلة و $2a$ ، $2b$ هي الاقطار الرئيسية للجسم الصلد وتكون عمودية على محور الدوران ويمر المحور خلال المركز في كل حالة ٠

٨ ــ ٠١١ اثبت ان عزم القصور الذاتي لثمن كرة صلدة منتظمة نصف قطرها a هو $\frac{2}{5}ma^2$ حول محور على طول احد حافاته المستقيمة ٠ حيث m تمثل كتلة الثمن (ملاحظة ــ هذه نفس العلاقة لكرة كتلتها m) ٠

٨ ــ ٠١٢ جد عزم القصور الذاتي لمخروط دائرى قائم صلد منتظم كتلته m حول

المحور المركزي ٠

٨ـ١٣٠ جد عزم القصور الذاتي لصفيحة شكلها نصف دائرة حول محور يمر من مركز الكتلة وعمودي على مستوى الصفيحة ٠

٨ـ١٤٠ قضيب رفيع AB طوله l وكتلته m ربط جسم كتلته m' في طرفه B ٠

جد ذبذبة القضيب اذا كان يتأرجح كبندول فيزيائي حول طرفه A ٠

٨ـ١٥٠ صفيحة مربعة طول ضلعها a تتذبذب كبندول فيزيائي حول احدى زواياها ، جد زمن الذبذبة ومركز التذبذب اذا كان محور الدوران (آ) عموديا على الصفيحة و (ب) في مستوى الصفيحة ٠

٨ـ١٦٠ اثبت ان زمن ذبذبة البندول الفيزيائي تساوي $2\pi(d/g)^{\frac{1}{2}}$ ، حيث d تمثل المسافة بين نقطة التعليق O ومركز التذبذب O' ٠

٨ـ١٧٠ كرة صلدة منتظمة لف حولها خيط رقيق لفات قليلة ٠ فاذا امسك طرف الخيط بصورة ثابتة ثم تركت الكرة لتسقط تحت تأثير الجاذبية الارضية ،جد تعجيل مركز الكرة ٠

٨ـ١٨٠ رجلان يمسكان طرفي لوح خشبي منتظم طوله l وكتلته m ٠ فاذا ترك احد الرجلين طرفه بصورة مفاجئة ، اثبت ان الحمل يهبط عند الرجل الثاني من mg/2 الى mg/4 .

٨ـ١٩٠ ثقلان كتلتاهما m_2 , m_1 ربطا بطرفي وتد خفيف لايقبل المد او البسط ٠ فاذا كان الوتد يمر على بكرة نصف قطرها a وعزم قصورها الذاتي I ٠ جد تعجيل الثقلين ٠ افرض ان $m_1 > m_2$ وقد اهمل الاحتكاك في محور البكرة ٠

٨ـ٢٠٠ اسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطرها a توازنت على اسطوانة ثابتة خشنة نصف قطرها b ($b > a$) بحيث كان محورا الاسطوانتين متوازيين ٠

فاذا اقلق التوازن قليلا ، جد النقطة التي تترك فيها الاسطوانة المتدحرجة الاسطوانة الثابتة ٠

٨ـ٢١ ٠ قضيب طويل منتظم طوله l يقف عموديا على ارض خشنة ٠ اذا اقلق القضيب قليلا وسقط على الارض (آ) جد المركبتين العمودية والافقية لرد فعل الارض كدوال للزاوية θ بين القضيب والعمود في اية لحظة (ب) جد كذلك الزاوية التي يبدأ فيها القضيب بالانزلاق وما هو الاتجاه الذى يحدث فيه الانزلاق ٠ افرض ان μ هو معامل الاحتكاك بين القضيب والارض ٠

٨ـ٢٢ قذفت كرة في البداية بدون دوران بانطلاق v_0 اعلى سطح مائل خشن ميلانه θ ومعامل احتكاكه μ ٠ جد موضع الكرة كدالة للزمن ، واحسب الموضع الذى تبدأ فيه الكرة دورانا نقيا ٠ افرض ان μ اكبر من $\frac{2}{7}\tan\theta$ ٠

٨ـ٢٣ ٠ وضع قرص دائرى منتظم على سطح افقي املس ٠ فاذا ضرب باتجاه مماسي في نقطة على محيطه ، حول اية نقطة سيبدأ القرص بالدوران ؟

٨ـ٢٤ ٠ صنع بندول مقذوفات (بلستي) ballistic pendulum من لوح خشبي طوله l وكتلته m ٠ وهو حر الحركة حول احد طرفيه O ، وكان في البداية في حالة السكون بالوضع العمودى ٠ اطلقت عليه قذيفة كتلتها m' بصورة افقية وعلى مسافة l من O وسكنت فيه ٠ اذا كانت θ_0 تمثل سعة البندول الناتجة جد سرعة القذيفة ٠

٨ـ٢٥ ٠ لوح خشبي منتظم AB كتلته m ومعلق من طرفه A ٠ فاذا امسك في البداية بحيث يصنع زاوية ٤٥ مع الافق ثم ترك ليسقط ٠ عند سقوطه

الى الموضع الافقي يصطدم طرفه B بمسارة وكان التصادم غير مرن مطلقا بحيث سكن اللوح مباشرة بعد التصادم . احسب الدفعين اللذين يكتسبهما الطرفان A و B .

٨-٢٦ . حل المسألة السابقة على فرض ان التصادم في B كان تام المرونة .

٨-٢٧ . قضيبان منتظمان AB و BC متساويا الكتلة m والطول ℓ ربطا في النقطة B بملاسة . وكانت المنظومة في البداية في حالة سكون على سطح افقي املس ، بحيث وقعت النقاط A ، B ، C على خط مستقيم . فاذا سلط الدفع $\hat{P}$ في النقطة A باتجاه عمودي على القضيب ، جد الحركة الابتدائية للمنظومة (ملاحظة - اعزل القضيبين) .

٨-٢٨ . حل المسألة السابقة للحالة التي يكون فيها القضيبان في البداية متعامدين .

الفصل التاسع

حركة الجسم الصلد العامة

General Motion of a Rigid Body

في حركة الجسم الصلد المقيدة ، اما ليدور حول محور ثابت أو يتحرك موازيا لمستو ثابت ، ففي الحالتين لا يتغير اتجاه محور الدوران • اما في حالات حركة الجسم الصلد العامة فيتغير اتجاه محور الدوران • فتكون الحالة هنا اكثر تعقيدا • وفي الحقيقة لا تكون الحركة بسيطة حتى في الجسم الذى لا تؤثر عليه قوى خارجية •

٩ ـ ١) زخم الجسم الصلد الزاوى • ضرب القصورات الذاتية

Angular Momentum of a Rigid Body. Products of Inertia

لما كان للزخم الزاوى اهمية كبيرة في دراسة دايناميك الاجسام الصلدة سنبدأ باستنباط العلاقة العامة للزخم الزاوى للجسم الصلد • الزخم الزاوى $\vec{L}$ لاى منظومة من الجسيمات ، كما عرف في البند ٧ ـ ٢ ، هو المجموع الاتجاهي للزخوم الزاوية لجميع الجسيمات عندما تؤخذ منفردة ، اى

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m\vec{v}_i)$$

وسوف نركز اهتمامنا ، في هذا الفصل ، على الخواص الاتجاهية للزخم الزاوى وعلاقته بالمعادلة الاساسية للحركة الدورانية •

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

حيث $\vec{N}$ يمثل العزم المسلط • وقد شرحت الظروف التي تصح فيها المعادلة السابقة في الفصل الثالث •

سنحسب اولا الزخم الزاوى لجسم صلد يدور حول نقطة ثابتة •

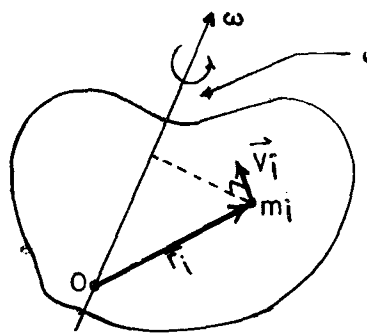
يمكننا في هذه الحالة تصور محاور مثبتة في الجسم تكون نقطة اصلها O في النقطة الثابتة (الشكل ٩ ــ ١) •

وبالرجوع الى البند (٥ ــ ٤) نعلم ان السرعة $\vec{v}_i$ لاى جسيم من مكونات الجسم يمكن التعبير عنها بالضرب الاتجاهي التالي

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

حيث $\vec{\omega}$ تمثل السرعة الزاوية للجسم الصلد و $\vec{r}_i$ متجه موضع الجسيم ووفقاً لذلك ، يكون الزخم الزاوى الكلي لجميع الجسيمات كما يلي

$$\vec{L} = \sum_i \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] \qquad (١ ــ ٩)$$



الشكل (٩ ــ ١) : متجه سرعة جسيم نموذجي $\vec{v}_i$ في جسم صلد يدور حول محور معين معرف بمتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$

الان ، مركبة ــ x للضرب الاتجاهي الثلاثي $\left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$ هي

$$\left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]_x = \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \qquad (٢ ــ ٩)$$

ويمكن التحقق من صحتها بسهولة من فك محدد الضرب الاتجاهي (وعلى الطالب ان يعتبر هذا كتمرين) •

فمركبة x للزخم الزاوى تكون اذن

$$L_x = \sum m_i \left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \right]$$

$$= \omega_x \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \quad (٩ - ٣)$$

وهناك علاقات مماثلة للمركبات L_y , L_z .

لحساب الزخم الزاوى لجسم صلد ممتد ، نستبدل المجموع بتكامل على الحجم ، كالسابق . ولندخل الاختصارات التالية :

عزم القصور الذاتي حول المحور -x

$$I_{xx} = \sum (y_i^2 + z_i^2)m_i = \int (y^2 + z^2)dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور -y

$$I_{yy} = \sum (z_i^2 + x_i^2)m_i = \int (z^2 + x^2)dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور -z

$$I_{zz} = \sum (x_i^2 + y_i^2)m_i = \int (x^2 + y^2)dm$$

ضرب -xy للقصور الذاتي

$$I_{yx} = I_{xy} = -\sum x_i y_i m_i = -\int xy\ dm$$

ضرب -xz للقصور الذاتي

$$I_{zx} = I_{xz} = -\sum x_i z_i m_i = -\int xz\ dm$$

ضرب -zy للقصور الذاتي

$$I_{zy} = I_{yz} = -\sum z_i y_i m_i = -\int zy\ dm$$

سبق ان حسبنا عزوم القصورات الذاتية لعدد من الحالات البسيطة في الفصل السابق . ونحصل على ضرب القصورات الذاتية بطريقة حساب مماثلة . وباستخدام الرموز السابقة يمكننا التعبير عن الزخم الزاوى كالاتي :

$$\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

$$= \hat{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \hat{j}(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) + \hat{k}(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \quad (٩-٤)$$

ويظهر ان متجه الزخم الزاوي $\vec{L}$ لا يكون دائما في نفس اتجاه محور الدوران او متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$.

امثلــــــة

١ــ جسم اعتباطي الشكل يدور حول المحور ‎-z‎ . جد الزخم الزاوي $\vec{L}$.

لما كان في هذه الحالة $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ عندئذ نحصل على

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xz}\omega + \hat{j}I_{yz}\omega + \hat{k}I_{zz}\omega$$

ولا سيما اذا كان كل من ضرب القصور الذاتي I_{xz} او I_{yz} لا يساوي صفرا • عندئذ توجد للزخم الزاوي $\vec{L}$ مركبة عمودية على ω • لهذا لا يكون الزخم الزاوي في نفس اتجاه محور الدوران •

٢ــ قضيب رفيع طوله ℓ وكتلته m مقيد ليدور بسرعة زاوية ثابتة $\vec{\omega}$ حول محور يمر من المركز و يصنع زاوية α مع القضيب • جد $\vec{L}$ •

نختار محاور مثبتة في القضيب كما هو مبين في الشكل (٩ ــ ٢) • عندئذ نحصل على

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m\ell^2}{12}$$

وجميع عزوم القصور الذاتية وضرب القصورات الذاتية الاخرى تساوي صفراً • ولما كان محور الدوران يقع في المستوى‎-yz‎ فمركبات $\vec{\omega}$ تكون كما يلي

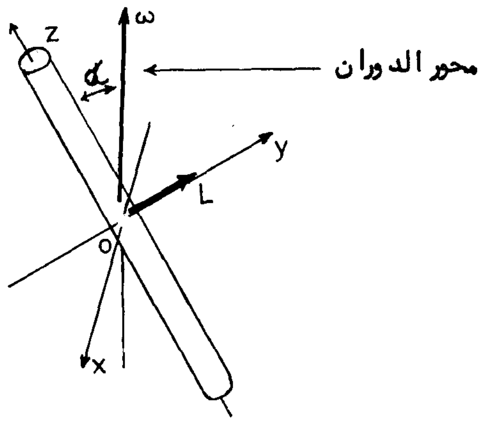
$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \omega \sin \alpha$$

$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$

فمتجه الزخم الزاوى يكون اذن

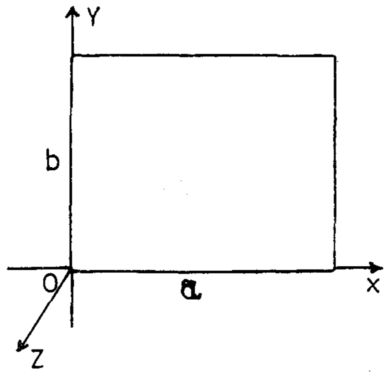
$$\vec{L} = \hat{j}\ \frac{m\ell^2}{12}\ \omega \sin\alpha$$



الشكل (٩ ـ ٢) • قضيب صلد مقيد الدوران حول محور مائل يمر من المركز •

اذن يبقى $\vec{L}$ باتجاه y ، كما هو مبين في الشكل ، ويدور مع الجسم حول $\vec{\omega}$ • (من السهل التحقق من ان $\vec{r}\times m\vec{v}$ لاى جزء من القضيب يكون على طول y) • وبصورة خاصة ، اذا كانت $\alpha = 90^{\circ}$ عندئذ $\vec{L}$ ، $\vec{\omega}$ يؤشران في نفس الاتجاه ، اى في اتجاه المحور y- .
وغير ذلك يكونان باتجاهين مختلفين •

٣ـ جد عزوم القصورات الذاتية وضرب القصورات الذاتية لصفيحة مستطيلة الشكل كتلتها m وضلعاها b,a لمحاور تقع نقطة اصلها على احد زوايا الصفيحة كما هو مبين في الشكل (٩ ـ ٣) •



الشــكل (٩ ـ ٣) صفيحــة مستطيلة الشكل

من نتائــج الفصل الســابق ، عندنـــا

$$I_{xx} = \tfrac{1}{3}\, mb^2$$

$$I_{yy} = \tfrac{1}{3}\, ma^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \tfrac{1}{3}\, m\, (a^2 + b^2)$$

المعادلة الاخــيرة نتجت من نظريــة المحــاور المتعامــدة . ولمــا كان $z = 0$ لجميــع نقاط الصفيحــة ، فضربا القصــورات الذاتيــة التي تحتــوى على z يجب ان تتلاشـــى اى ان

$$I_{zx} = I_{yz} = 0$$

واخــيرا ، نحصل على ضرب xy للقصــور الذاتي من

$$I_{xy} = -\int xy\, dm = -\int_0^b \int_0^a xy\, \rho\, dx\, dy = -\rho\, \frac{a^2 b^2}{4}$$

حيث ρ تمثل كتلة وحدة المساحة ٠ اضف الى ذلك ، لما كان

$$m = \rho ab$$

فنحصل على

$$I_{xy} = -\tfrac{1}{4} mab$$

لضرب xy للقصور الذاتي للصفيحة

الكمية المتدة للقصور الذاتي Inertia Tensor

نرى الان ان الخواص الدورانية للجسم الصلد حول نقطة تتطلب صفا set من تسع كميات هي I_{xx}, I_{xy} .... لاجل وصفها بصورة كاملة ٠ وهناك امثلة اخرى كثيرة تتطلب صفوفا كهذه الكميات لوصف خاصية فيزيائية في نقطة وصفا كاملاً ٠ ومثل هذه الصفوف تسمى بالكميات المتدة Tensors على ان تخضع لقوانين تحولات معينة لا نحاول بحثها هنا ٠ والصف الذى عرف اعلاه يسمى بالكمية المتدة للقصور الذاتي للجسم ٠ وقد بحث تمثيله بدلالة المصفوف في البند ٩ ــ ١٠ ٠ فالقارئ الحسن الاطلاع في رموز المصفوف يستحسن ان يقرأ هذا البند الان ٠

٩ ــ ٢) محاور الجسم الصلد الرئيسية Principal Axes of a Rigid Body

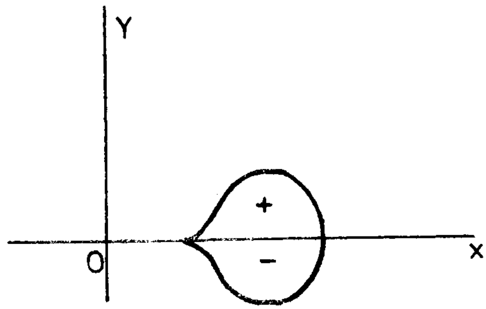
تبسط معادلات الجسم الصلد الرياضية كثيرا اذا استخدمت محاور بحيث تتلاشى جميع ضروب القصورات الذاتية ٠ ويقال عن هذه المحاور بانها محاور الجسم الرئيسية في النقطة O نقطة اصل المحاور ٠ وبصورة خاصة الزخم الزاوى يصبح

$$L = \hat{i} I_{xx}\omega_x + \hat{j} I_{yy}\omega_y + \hat{k} I_{zz}\omega_z \qquad (٩ ــ ٥)$$

عند استخدام المحاور الرئيسية ٠ وفي هذه الحالة يقال عن عزوم القصورات الذاتية الثلاث بعزوم الجسم الرئيسية في النقطة O.

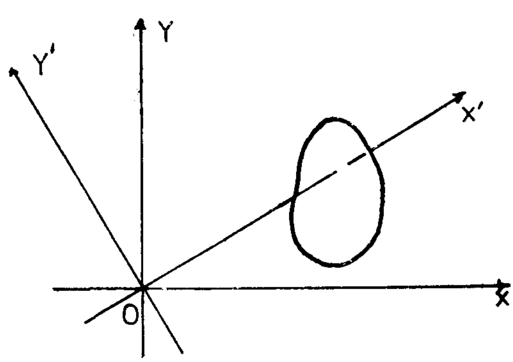
لنبحث مسالة ايجاد المحاور الرئيسية ٠ اولا ، اذا كان في الجسم نوع من التناظر ، عندئذ بصورة اعتيادية يمكن اختيار محاور بالمعاينة

بحيث يكون كل ضرب قصور ذاتي متكونا من جزئين متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه وبذلك يتلاشى . فمثلا جسم الصفيحة المستوية المتناظرة المبينة في الشكل (٩ ــ ٤) له محاور رئيسية في النقطة O وهي المحاور المبينة .



الشكل (٩ ــ ٤) صفيحة متناظرة موضوعة بحيث ضرب القصور الذاتي xy- يساوى صفرا

وعلى كل ليس من الضرورى ان يكون الجسم متناظرا لكي يتلاشى ضرب القصورات الذاتية . فمثلا افرض صفيحة مستوية اعتباطية الشكل (الشكل ٩ ــ ٥) . فاذا كان المستوى ــ xy هو مستوى الصفيحة عندئذ $z = 0$ ويتلاشى كل من I_{xz} , I_{yz} فبالنسبة لاية نقطة اصل معينة في مستوى الصفيحة ، من السهل البرهنة على تواجد محاور ، وبصورة دائمية ، بحيث يتلاشى التكامل $\int xy\, dm$. ولتوضيح هذا ، نلاحظ ان التكامل يغير اشارته عند دوران المحاور Oxy بزاوية 90° ، لان موضع الصفيحة يتغير من ربع الى الذى يليه كما مبين



الشكل (٩ــ٥) محاور دائرة

ووفقا لذلك يجب ان يتلاشى التكامل لزاوية دورانية تقع بين الصفر و 90° . هذه الزاوية تعرّف محاوراً يتلاشى فيها ضرب القصورات الذاتية . وهذه بالتعريف . محاور رئيسية .

ويمكن ان نبرهن بطريقة مماثلة انه لاى جسم صلد تتواجد دائما محاور رئيسية في اية نقطة معينة . وسوف تشرح طريقة عامة في البند ٩ ــ ١٠ لايجاد المحاور الرئيسية .

افرض ان جسما يدور حول محور رئيسي مثل المحور z- . عندئذ $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ وعلاقة الزخم الزاوى تبسط الى حد واحد هو

$$\vec{L} = \hat{k} I_{zz} \omega$$

حيث السرعة الزاوية هي

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\omega$$

وفي هذه الحالة يكون متجه الزخم الزاوى موازيا لمتجه السرعة الزاوية او محور الدوران . اذن لدينا الحقيقة المهمة التالية : اما ان يكون $\vec{L}$ في نفس اتجاه محور الدوران او لا يكون ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان محور الدوران محورا رئيسيا او ليس رئيسيا

التوازن الديناميكي Dynamic Balancing

هناك تطبيق للقاعدة السابقة في حالة جهاز دائر كدولاب الموازنة او المروحة ، يقع مركز الكتلة على محور الدوران اذا كان الجهاز متوازنا استاتيكيا . ولكي يتوازن داينامكيا يجب ان يكون محور الدوران محورا رئيسيا ايضا ، بحيث يقع متجه الزخم الزاوى $\vec{L}$ على طول المحور عند دوران الجسم . وبالعكس ، اذا لم يكن محور الدوران محورا رئيسيا فيغير متجه الزخم الزاوى اتجاهه ليرسم مخروطا عند دوران الجسم .

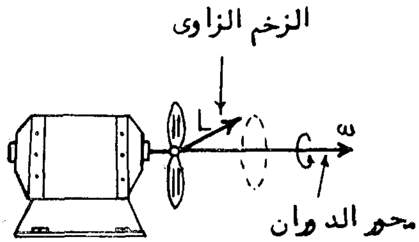
(الشكل ٩ ــ ٦) ولما كان $\frac{d\vec{L}}{dt}$ يساوى العزم المسلط فعندئذ يجب ان يكون هناك عزم يؤثر على الجسم واتجاهه يكون عموديا على المحور فينتج عنه رد فعل على الحوامل bearing's. اذن في حالة الدولاب

غير المتوازن ديناميكيا ، قد يكون هناك تذبذب عنيف و رجفة حتى لو كان الدولاب متوازناً استاتيكيا ٠

ايجاد المحاور الرئيسية عندما يكون احدهما معلوما

في حالات كثيرة قد يكون لجسم ما نوع من التناظر بحيث يمكن ايجاد محور رئيسيا واحد له على الاقل بالمعاينة ٠ فاذا كانت هذه الحالة فعندئذ يمكن ايجاد المحورين الرئيسيين الاخرين كما يلي :

افرض ان المحور z- معروف كمحور رئيسي في نقطة اصل محاور ملائمة ٠



الشكل (٩ ـ ٦) ٠ مروحة دائرة ٠ يرسم متجه الزخم الزاوى $\vec{L}$ مخروطا حول محور الدوران عندما تكون المروحة غير متوازنة ديناميكيا ٠

فمن التعريف

$$I_{zx} = I_{zy} = 0$$

اى ان المحورين الرئيسيين الاخرين يجب ان يقعا في المستوى -xy .
واذا كان الجسم يدور حول احد المحورين الرئيسيين او الاخر ، يكون اتجاه متجه الزخم الزاوى في نفس اتجاه متجه السرعة الزاوية و بذلك يمكننا كتابة

$$I_p \vec{\omega} = \vec{L}$$

حيث I_p يمثل احد العزمين الرئيسيين للقصور الذاتي في السؤال ٠
و يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة المركبات على النحو التالي :

$$I_p \omega_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y$$

$$I_p \omega_y = I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y \qquad (٩ - ٦)$$

ولنفرض ان θ تمثل الزاوية بين المحور -x والمحور الرئيسي الذى يدور حوله الجسم • عندئذ

$$\tan \theta = \omega_y / \omega_x$$

و

$$I_p = I_{xx} + I_{xy} \tan \theta$$

$$I_p \tan \theta = I_{xy} + I_{yy} \tan \theta$$

وعند حذف I_p من المعادلتين نحصل على

$$I_{xy}(\tan^2 \theta - 1) = (I_{yy} - I_{xx}) \tan \theta$$

ومنها يمكن ايجاد θ . في هذا التطبيق • يستحسن استخدام المتطابقة المثلثية

$$\tan 2\theta = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$$

والتي تعطي

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \qquad (٩ - ٧)$$

وهناك قيمتان للزاوية θ تقعان بين $\pi/2$ و $-\pi/2$ وهما تستوفيان المعادلة السابقة • وهاتان القيمتان تعينان اتجاهي المحورين الرئيسيين في المستوى-xy .

مثال

جد اتجاهات المحاور الرئيسية في مستوى صفيحة متوازية الاضلاع طول ضلعيها a,b في زاوية •

من مثالنا السابق • مثال (٣) بند ١ ـ ٩ نرى ان

$$\tan 2\theta = \frac{-2(mab/4)}{(mb^2/3)-(ma^2/3)} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}$$

او

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{3ab}{2(a^2 - b^2)} \right]$$

٩ ـ ٣ • الطاقـة الحركيـة الدورانيـة لجسـم صلـد

Rotational Kinetic Energy of a Rigid Body

لنحسب الطاقـة الحركيـة لجسم صلـد يـدور حول نقطـة ثابتـة بسـرعة زاويـة $\vec{\omega}$ • وكما في حسـابنا للزخـم الزاوى ، نحصـل على السـرعة $\vec{v}_i$ لجسيم نموذجي i ، وهي

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

حيث $\vec{r}_i$ يمثل متجـه موضـع الجسيم بالنسـبة الى النقطـة الثابتـة • اذن نحصـل على الطاقـة الحركيـة T من المجمـوع •

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \left[(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (m_i \vec{v}_i) \right] \qquad (٩ ـ ٨)$$

ويمكننا في الضرب العـددى الثلاثي استبدال علامـة الضرب العـددى (dot) بعلامـة الضرب الاتجاهي (cross)• (انظر البند ١ ـ ١٤) • اذن

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \left[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \right] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \qquad (٩ ـ ٩)$$

ولكن $\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$ يمثل من التعريف ، الزخم الزاوى $\vec{L}$ • لـذلك يمكننا كتابـة

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \qquad (٩ ـ ١٠)$$

والمعادلـة السـابقة تعطي الطاقـة الحركيـة الدورانيـة لجسـم صلـد بدلالة السـرعة الزاويـة $\vec{\omega}$ والزخم الزاوى $\vec{L}$• وهي نظـيرة المعادلـة

$T = \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{P}$ للطاقة الحركية الانتقالية لجسيم او منظومة

حيث $\vec{v}$ تمثل سرعة مركز الكتلة و $\vec{P}$ الزخم الخطي . والطاقة الحركية الكلية لحركة جسم الانتقالية والدورانية هي المجموع

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{P}$$

وبالتعبير عن الضرب العددى $\vec{\omega}\cdot\vec{L}$ بصورة واضحة بدلالة المركبات يمكننا كتابة

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z) \qquad (٩ - ١١)$$

للطاقة الحركية الدورانية . وبالاضافة الى ذلك ، يمكننا التعبير عن الزخم الزاوى بدلالة مركبات $\vec{\omega}$ وعزوم القصور الذاتي وضرب القصورات الذاتية للحصول على

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x + 2I_{xy}\omega_x\omega_y) \qquad (٩ - ١٢)$$

للطاقة الحركية الدورانية . واذا استخدمنا المحاور الرئيسية ، تتلاشى الحدود التي تحتوى على ضرب القصورات الذاتية ونحصل على العلاقة البسيطة التالية :

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) \qquad (٩ - ١٣)$$

حيث I_{xx} ، I_{yy} ، I_{zz} هي العزوم الرئيسية للقصور الذاتي

مثال

جد الطاقة الحركية الدورانية لقضيب رفيع طوله l مقيد الدوران حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية α مع القضيب ، كما في الشكل (٩ ـ ٢) .

باختيار المحاور المبينة ، تكون السرعة الزاوية

$$\vec{\omega} = \hat{j}\,\omega \sin\alpha + \hat{k}\,\omega \cos\alpha$$

ووفقا لذلك ولما كانت المحاور عبارة عن محاور رئيسية فيكون عندنا

$$\vec{L} = \hat{j}\,\frac{m\ell^2}{12}\,\omega \sin\alpha$$

عندئذ نحصل على

$$T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{m\ell^2}{24}\,\omega^2 \sin^2\alpha$$

للطاقة الدورانية للقضيب

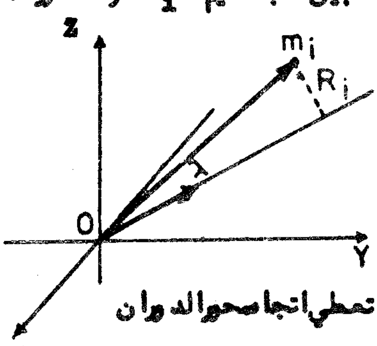
٩ ـ ٤) عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول محور اعتباطي ، المجسم الناقص للعزم

Moment of Inertia of a Rigid Body about an Arbitrary Axis. The Momental Ellipsoid

لنستخدم التعريف الاساسي

$$I = \sum m_i R_i^2$$

لايجاد عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول اى محور ، في العلاقة السابقة R_i يمثل المسافة العمودية بين الجسيم m_i والمحور كما هو مبين في الشكل ٩ ـ ٧



الشكل ٩ـ٧ تعريف الوحدة المتجه $\vec{\lambda}$ التي تعطي اتجاه محور الدوران

لنفرض اننا مثلنا اتجاه محور الدوران بالوحدة المتجهة $\vec{\lambda}$. عندئذ

$$R_i = |\vec{r}_i \times \vec{\lambda}|$$

حيث

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

يمثل متجه الموضع للجسيم i . وفضلا عن ذلك ، لنفرض ان $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ هي اتجاهات جيوب تمام المحور ، اي ان

$$\vec{\lambda} = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma$$

عندئذ نحصل

$$R_i^2 = |\vec{r}_i \times \vec{\lambda}|^2 = (y_i \cos\gamma - z_i \cos\beta)^2 + (z_i \cos\alpha - x_i \cos\gamma) + (x_i \cos\beta - y_i \cos\alpha)^2$$

وعند ترتيب الحدود مرة اخرى ، نجد ان

$$R_i^2 = (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma - 2y_iz_i\cos\gamma\cos\beta - 2z_ix_i\cos\alpha\cos\gamma - 2x_iy_i\cos\alpha\cos\beta$$

ويمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي $I = \sum m_i R_i^2$ اذن كما يلي

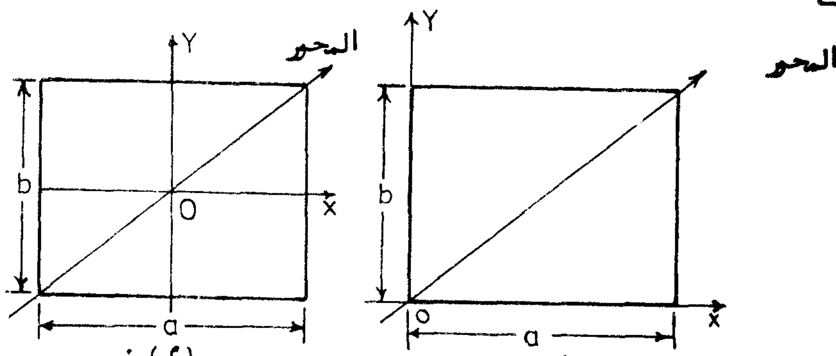
$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{yz}\cos\gamma\cos\beta + 2I_{zx}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \qquad (١٤ - ٩)$$

والعلاقة المذكورة اعلاه تعطي عزم القصور الذاتي لجسم صلد حول اي محور بدلالة اتجاهات جيوب التمام لذلك المحور والعزوم وضرب القصورات الذاتية للجسم في محاور اعتباطية تقع نقطة اصلها على المحور . فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية في نقطة الاصل ، عندئذ تتلاشى ضرب القصورات الذاتية وتختصر العلاقة الى علاقة بسيطة هي

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \qquad (٩ - ١٥)$$

مثـــــال

جد عزم القصور الذاتي لصفيحة مستطيلة الشكل منتظمة حول احد اقطارها



الشكل (٩ ـ ٨) • صفيحة مستطيلة الشكل تدور حول القطر •
(أ) نقطة الاصل في المركز (ب) نقطة الاصل في الزاوية

اولا ـ لنختر نقطة الاصل في مركز الصفيحة والمحاور كما هو مبين في الشكل (٩ ـ ٨)(أ) • وواضح من التناظر انها تمثل محاور رئيسية • فاذا كانت a و b هي اضلاع الصفيحة وكتلتها m ، فعندئذ تكون العزوم الرئيسية في المركز هي :

$$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

واتجاهات جيوب تمام القطر وهي :

$$\cos\alpha = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\gamma = 0$$

فاذا عوضت هذه القيم في المعادلة (٩ ـ ١٥) نحصل على

$$I = \frac{mb^2a^2}{12(a^2+b^2)} + \frac{ma^2b^2}{12(a^2+b^2)} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

وكطريقة ثانية ، افرضانا اخترنا المحاور على طول حافتي الصفيحة كما هو مبين في الشكل (٩ ـ ٨ (ب)) . هذه ليست محاور رئيسية ، ولكن سبق ان استنبطنا العلاقة للعزم وضرب القصورات الذاتية في المثال ٣ البند (٩ـ١) . اتجاهات الجيوب تمام القطر هي نفسها كالسابق . اذن ـ باستخدام المعادلة (٩ ـ ١٤)

$$I = \frac{mb^2}{3}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right) + \frac{ma^2}{3}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) - \frac{mab}{4}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

والتي تتفق مع نتيجتنا السابقة .

(٩ ـ ٥) المجسم الناقص للعزم The Momental Ellipsoid

قد نحصل على تفسير هندسي مفيد جدا لعلاقة عزم القصور الذاتي العامة

بالطريقــة التاليـــــة :

افرض محــور دوران اعتباطي حول نقطــة معينــة O . لنعرف النقطــة P على محــور الــدوران بحيث تكون المســافة OP تســاوى عدديا مقلوب الجـــذر التربيعي لعزم القصــور الذاتي حول المحور .

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

الان لنفرض ان x, y, z هي احداثيات النقطــة P ، ولنفـــــــــرض ان α ، β ، γ هي اتجاهات زوايا المســتقيم OP . عندئذ نحصل على :

$$\cos \alpha = \frac{x}{OP} = x \sqrt{L}$$

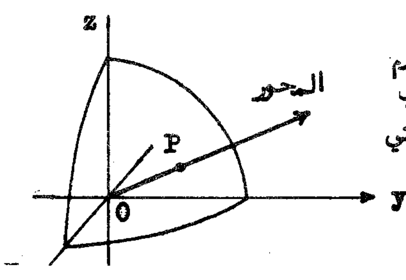
$$\cos \beta = \frac{y}{OP} = y \sqrt{L}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{OP} = z \sqrt{L}$$

فاذا عوضنــا هــذه القيم لاتجاهات جيــوب التمام في العلاقــة العامــة لعـــزم القصــور الذاتي في المعادلة (٩ ــ ١٤) ، نحصل على

$$x^2I_{xx} + y^2I_{yy} + z^2I_{zz} + 2yzI_{yz} + 2zxI_{zx} + 2xyI_{xy} = 1 \qquad \text{...... (٩ ــ ١٦)}$$

المعادلة الســابقة تمثل معادلة ســطح ، الشكل (٩ ــ ٩) . فهي تعرف المحل الهندســي للنقاط P عندما يتغير اتجــاه المحور OP. ولما كانت من الدرجــة الثانيــة لذلك فهي تمثل المعادلة العامة لســطح ثلاثي الابعاد . ولما كان I



الشكل (٩ ــ ٩) . شحن مجسم ناقص للعزم المسافة OP تساوى الى مقلـــوب الجذر التربيعي لعزم القصور الذاتي حول المحور .

لا يمكن ان يساوى صفرا لاى جسم متمد ، فالسطح محدود . اذن يجب ان يكون مجسما ناقصاً[٢] ellipsoid . ويسمى بالمجسم الناقص للعزم لجسم في النقطة O.

اذا كانت المحاور هي محاور رئيسية ، فمعادلة المجسم الناقص للعزم تصبح

$$x^2I_{xx} + y^2I_{yy} + z^2I_{zz} = 1 \qquad (١٧\_٩)$$

اذن تتطابق المحاور الرئيسية للجسم مع المحاور الرئيسية للمجسم الناقص للعزم . ولما كان هناك دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لكل مجسم ناقص ، ينتج ان يتواجد دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لجسم في نقطة معينة .

اذا تساوى اثنان من العزوم الثلاثة الرئيسية فعندئذ يكون المجسم الناقص للقصور دورانيا . واذا كانت جميع العزوم للقصور متساوية في النقطة O ، فالمجسم الناقص للعزم يكون كرة وينتج عن ذلك ان عزم القصور هو نفسه لاى مستقيم يمر من O مهما كان اتجاهه

مثال

جد معادلة المجسم الناقص للعزم لصفيحة مستطيلة الشكل ضلعاها a, b لمحاور نقطه اصلها في المركز .

من مثالنا السابق في البند (٩ ـ ٤) الذى وجدنا فيه عزم القصور

---

(٢) في حالة جسم مستقيم ورفيع ما لا نهاية ، فعزم القصور حول محور الجسم يساوى صفرا . ويتحول المجسم الناقص الى اسطوانة .

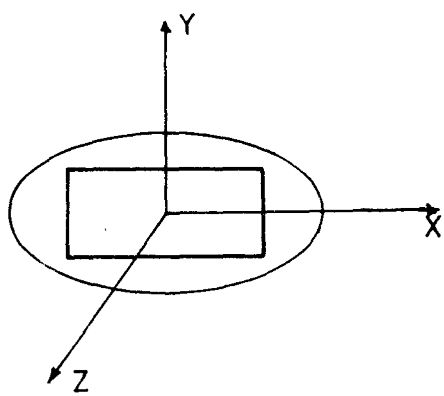
الذاتي ، نحصل مباشـرة على

$$x^2\left(\frac{mb^2}{12}\right) + y^2\left(\frac{ma^2}{12}\right) + z^2\left(\frac{ma^2 + mb^2}{12}\right) = 1$$

لمعادلة الجسـم الناقص للعزم . نلاحظ ان الاقطار الرئيسـية للجسـم الناقص هي بالنسـب التاليـة :

$$b^{-1} : a^{-1} : (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

فمثلا اذا كانت $a/b = 2$ فالنسـب هي $2 : 1 : 2/\sqrt{5}$.
اذا يقابل القطـر الطويـل للجسـم الناقص للعـزم محـور الصفيحـة الطويـل المجسـم موضح في الشكل (٩ ــ ١٠)



الشكل (٩ ــ ١٠) المجسم الناقص للعزم لمتوازى مستطيلات

٩ــ٦) معادلات اويلـر لحركـة الجسـم الصلـد .

Euler's Equations of Motion of a Rigid Body

افرض للمعادلة الاساسية التي تتحكم في دوران جسم صلد تحت تاثير العزم

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم يمكن التعبير عن $\vec{L}$ بالعبارة البسيطة التالية

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xx}\omega_x + \hat{j}I_{yy}\omega_y + \hat{k}I_{zz}\omega_z$$

حيث I_{zz}, I_{yy}, I_{xx} تمثل عزوم القصور الذاتي الرئيسية للجسم في نقطة اصل المحاور . ولاجل ان تبقى الصيغة للزخم الزاوى الانفة الذكر صحيحة عند دوران الجسم ، يجب ان تدور المحاور ايضا مع الجسم . اى ان سرعة الجسم الزاوية هي نفسها للمحاور . (هناك استثناء . اذا كان اثنان من عزوم القصور الثلاثة الرئيسية متساويين بحيث يكون المجسم الناقص للعزم دورانيا ، فعندئذ لا حاجة ان تكون المحاور ثابتة في الجسم لكي تكون محاور رئيسية . وسوف ناخذ هذه الحالة بنظر الاعتبار في البند (٩ ـ ٨) .

وفقا لنظرية المحاور الدائرة التي استنبطت في الفصل الخامس ، يعطي معدل التغيير الزمني لمتجه الزخم الزاوى المنسوب للمحاور الدائرة عندئذ بالعلاقة التالية :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، معادلة الحركة بالمحاور الدائرة هي :

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \qquad (٩ ـ ١٨)$$

وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات الديكارتيه على النحو التالي :

$$N_x = \dot{L}_x + (\vec{\omega} \times \vec{L})_x$$
$$N_y = \dot{L}_y + (\vec{\omega} \times \vec{L})_y \qquad (٩\_١٩)$$
$$N_z = \dot{L}_z + (\vec{\omega} \times \vec{L})_z$$

او بوضوح اكثر

$$N_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$
$$N_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \qquad (٩\_٢٠)$$
$$N_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

وتعرف هذه بمعادلات اويلر لحركة الجسم الصلد • وهي لها اهمية اساسية في نظرية دوران الاجسام الصلدة الممتدة •

جسم مقيد الدوران حول محور ثابت

Body Constrained to Rotate about a Fixed Axis

كتطبيق لمعادلات اويلر ، لنفرض الحالة الخاصة لجسم صلد قيد دورانه حول محور ثابت بسرعة زاوية ثابتة • عندئذ

$$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$$

وتبسط معادلات اويلر عندئذ الى

$$N_x = \omega_y\omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$
$$N_y = \omega_z\omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \qquad (٩\_٢١)$$
$$N_z = \omega_x\omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

هذه تعطي مركبات العزم التي يؤثر بها المسند المقيد على الجسم •

وبصورة خاصة ، اذا كان محور الدوران محورا رئيسيا فعندئذ يكون اثنان

من مركبات $\vec{\omega}$ الثلاث يساويان صفرا • ووفقا لذلك تتلاشى جميع المركبات الثلاث للعزم $\vec{N}$ • وهذا يتفق مع الشرح السابق الخاصة بالتوازن الديناميكي في البند (٩ ـ ٢) •

مثال

احسب العزم الذى يجب ان يسلط على قضيب رفيع لكي يدور بانطلاق زاوى ثابت ω حول محور يمر من المركز ويصنع زاويه α مع القضيب كما في المثال (٢) بند (٩ ـ ١) •

باستخدام نتائج المثال المشار اليه ، نجد ان معادلات اويلر تعطي مركبات العزم كالاتي :

$$N_x = \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(-\frac{m\ell^2}{12} \right)$$

$$N_y = 0$$

$$N_z = 0$$

اذن يتلاشى العزم عندما يتلاشى الجيب او الجيب التمام ، اى عندما تكون α تساوى صفرا او 90°.

وفي الحالتين يدور القضيب حول محور اساسي •

٩ ـ٧) الدوران الحر لجسم صلد عندما لا تؤثر عليه قوى الوصف الهندسي للحركة

Free Rotation of a Rigid Body Under no Forces.

Geometric Description of the Motion.

لنفرض حالة الجسم الصلد الذى يدور بحرية في اى اتجاه كان حول نقطة معينة مثل O. ولا توجد هناك عزوم تؤثر على الجسم • هذه الحالة للدوران الحر توضح مثلا بواسطة جسم يستند من مركز كتلته

على محور املس • ومثال آخر هو جسم صلد يتحرك بحرية ولا توءثر عليه قوى او السقوط الحر في مجال جاذبية منتظم بحيث لا توجد عزوم النقطة O في هذه الحالة هي مركز الكتلة •

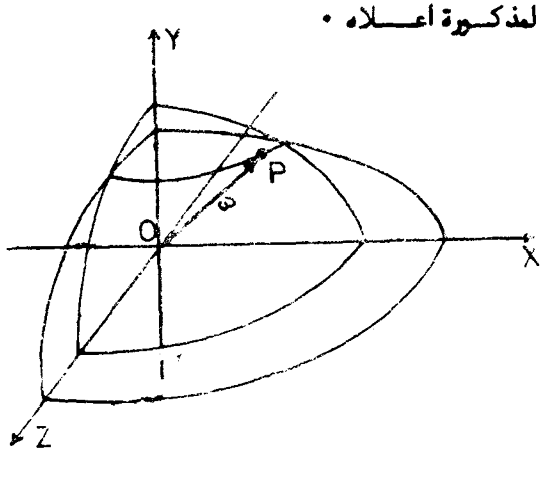
عندما يكون العزم صفرا ، فالزخم الزاوى للجسم ، كما يرى من الخارج يجب ان يبقى ثابتا في الاتجاه والمقدار وفقا لقانون حفظ الزخم الزاوى العام • ولكن بالنسبة لمحاور داثرة مثبتة في الجسم ، قد يتغير متجه الزخم الزاوى في الاتجاه ولو ان مقداره يجب ان يبقى ثابتا • ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالمعادلة التالية

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = \text{const.} \qquad (٩ - ٢٢)$$

وبدلالة المركبات المنسوبة الى المحاور الرئيسية للجسم تصبح المعادلة السابقة كالاتي :

$$I_{xx}^2\,\omega_x^2 + I_{yy}^2\,\omega_y^2 + I_{zz}^2\,\omega_z^2 = L^2 = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٣)$$

وعند دوران الجسم ، قد تتغير مركبات $\vec{\omega}$ ، ولكنها يجب ان تبقى دائما مستوفية للمعادلة المذكورة اعلاه •



الشكل (٩ـ١١) تقاطع مجسمين الناقصين لجسم صلد يدور بحرية فيهما T,L ثابتتان •

و نحصل على علاقــة ثابتـة عنـد اخـذ الطاقــة الحركيـة للدوران بنظر الاعتبار • مـرة اخـرى ، لما كان العـزم يسـاوى صفـرا ، فالطاقــة الحركيـة للــدوران الكليـة يجب ان تبقى ثابتـة • هذه قد يعبر عنها كما يلي :

$$\vec{\omega}\cdot\vec{L} = 2T = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٤)$$

او ما يكافىء ذلك بدلالـة المركبـات ، اى

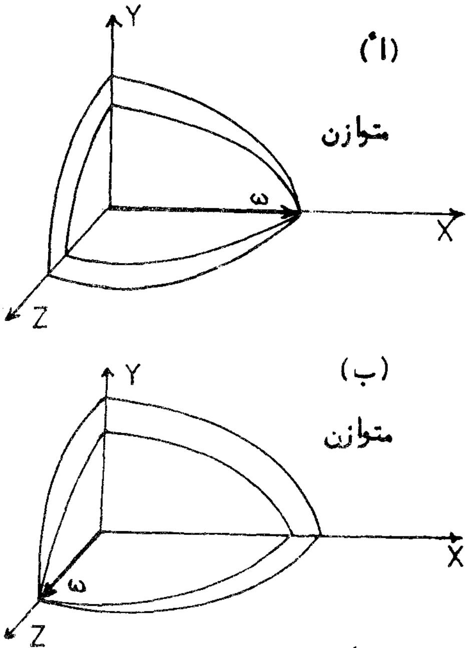
$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2T = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٥)$$

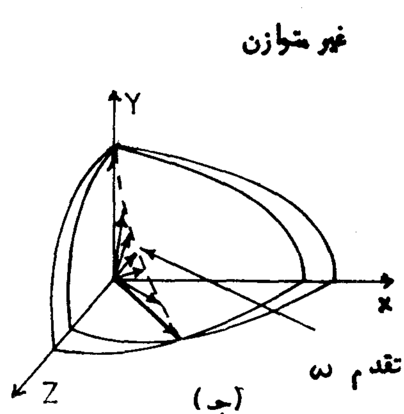
نرى الان ان مركبـات $\vec{\omega}$ يجب ان تستوفى في آن واحـد معادلتــين مختلفتــين تعبران عن ثبـوت الطاقــة الحركيـة ومقدار الزخـم الزاوى ، المعادلتان (٩ ــ ٢٣) و (٩ ــ ٢٥) • هاتان همـا معادلتا المجسـمين الناقصين اللذين محاورهما الرئيســية تتطابـق مع المحـاور الرئيســية للجسـم • المجســم الاول ، المعادلـة (٩ــ٢٣) ، نسـب اقطاره الرئيسـية هي $I_{xx}^{-1} : I_{yy}^{-1} : I_{zz}^{-1}$ المجسـم الثاني ، المعادلة (٩ ــ ٢٥) ، نســب اقطـاره الرئيســية هي $I_{xx}^{-\frac{1}{2}} : I_{yy}^{-\frac{1}{2}} : I_{zz}^{-\frac{1}{2}}$

و هذا يعرف بمجسـم پوانسوت الناقص Poinsot ellipsoid وهو مماثل للمجسم الناقص للعزم • عنـد دوران الجسـم يرسـم نهايـه متجـه السـرعة الزاويــة منحنيـا هــو تقاطــع المجســمين الناقصــين • وهذا موضــح في الشكل (٩ــ١١)•

من معادلــتي تقاطــع المجســمين الناقصين ، المعادلتان (٩ ــ ٢٣) و (٩ ــ ٢٥) ، يمكن البرهنــة في الحالة التي يتطابــق فيهـا محور الــدوران الابتدائي مع احـد المحـاور الرئيسـية للجسـم ، عندئذ يتقلص منحني التقاطــع الى نقطــة • وبعبارة اخـرى يتلامس المجسـمان الناقصـان في قطر رئيســي ، و يـدور الجسـم بصـورة مسـتقرة حول هذا المحـور • ولكن هذا يكون صحيحــا فقط عندمـا يكـون الـدوران الابتدائـي حول المحـور الذى عـزم قصوره الــذاتي

في نهايته العظمى او الصغرى • واذا كان حول المحور المتوسط، كالمحور y- حيث $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$ عندئذ تقاطع المجسمين لا يكون نقطة ، ولكنه منحن يدور كليا حولهما ، كما هو موضح في الشكل (٩ـ١٢) • وفي هذه الحالة يكون الدوران قلقا لان محور الدوران يطوف حول الجسم • ويمكن توضيح هذه الحقائق بسهولة وذلك بقذف قطعة مستطيلة اوكتاب في الهواء •



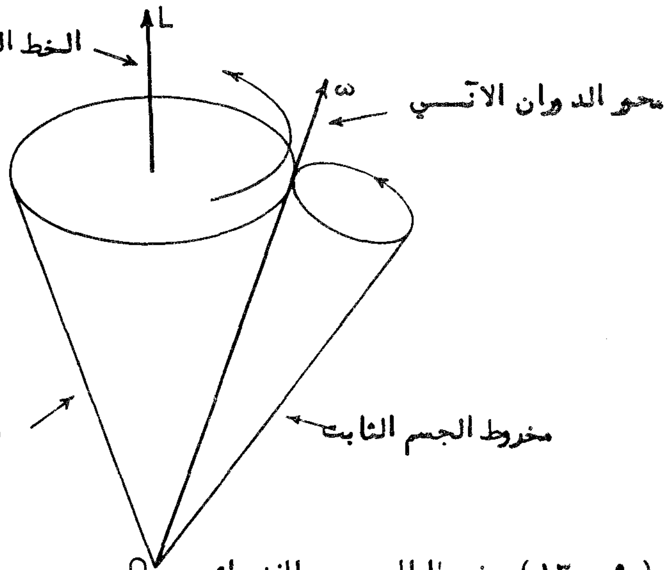


الشكل (٩ ـ ١٢)
مجسمان جسم صلد حر الدوران حول محور فيهما T, L ثوابت • قصور العزم الذاتي في (أ) اصغر (ب) اعظم (جـ) متوسط

مخروطا الفضاء والجسم Body and Space Cones

يمكن وصف حركة متجه السرعة الزاوية المذكورة اعلاه بقولنا ان $\vec{\omega}$ ترسم مخروطا في المحاور الدائرة المثبتة في الجسم • ويسمى هذا المخروط بمخروط الجسم الثابت Body-Fixed cone كذلك بالنسبة للمحاور المثبتة في

الفضاء ، السرعة الزاوية تطوف Precesses حول متجه الزخم الزاوى الثابت $\vec{L}$ ، وكذلك يمكن وصف هذا الطواف بقولنا ان $\vec{\omega}$ ترسم مخروطا حول $\vec{L}$ • هذا المخروط يسمى بمخروط الفضاء الثابت Space-Fixed cone ويعين محور الدوران — في اية لحظة من اتجاه $\vec{\omega}$. فالحركة الحقيقية للجسم اذن تمثل بتدحرج مخروط الجسم على مخروط الفضاء • ويمثل خط التلامس الاني اتجاه $\vec{\omega}$ • وقد وضحت هذه الحالة في الشكل (٩ ـ ١٣) • وفي الحالة العامة يكون مقطعا مخروطي الفضاء والجسم قطعا ناقصا الا اذا كان للجسم محور تناظر ، فعندئذ يكونان مخروطين دائريين قائمين •



الشكل (٩ ـ ١٣) مخروطا الجسم والفضاء

٩ ـ ٨) الدوران الحر لجسم صلد له محور تناظر • المعالجة التحليلية

Free Rotation of a Rigid Body with an Axis of Symmetry. Analytical Treatment.

ولو ان الوصف الهندسي لحركة الجسم الصلد الذى اعطي في البند السابق يساعد على تصور الدوران الحر غير الخاضع لتاثير العزوم ولكن هذه الطريقة

لا تعطي قيم عددية بصورة مباشرة • وسنستمر الان لفهم هذا الوصف بالطرق التحليلية التي تعتمد على تكامل معادلات اويلر المباشر •

سوف نحل معادلات اويلر للحالة الخاصة التي يكون فيها للجسم محور تناظر • بحيث يتساوى اثنان من عزوم القصور الذاتي الثلاثة (في الحقيقة ان ذلك يتطلب ان يكون للمجسم الناقص للعزم محور تناظر و ليس للجسم نفسه) •

لنختر المحور z- كمحور للتناظر و لندخل الرموز التالية

$I_s = I_{zz}$ (عزم القصور الذاتي حول محور التناظر)

$I = I_{xx} = I_{yy}$ (العزم حول المحاور العمودية على محور التناظر)

للحالة التي يكون فيها العزم مساويا للصفر تصبح معادلات اويلر كما يلي :

$$I\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_s - I) = 0$$
$$I\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I - I_s) = 0 \qquad (٩ - ٢٦)$$

$$I_s\dot{\omega}_z = 0$$

وينتج من المعادلة الاخيرة ان

$$\omega_z = \text{constant} \qquad (٩ - ٢٧)$$

و لنعرّف الان الثابت Ω بالكمية

$$\Omega = \omega_z \frac{I_s - I}{I} \qquad (٩ - ٢٨)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلتين الاولى والثانية من (٩-٢٦) على النحوالتالي

$$\dot{\omega}_x + \Omega\,\omega_y = 0 \qquad (٩ - ٢٩)$$

$$\dot{\omega}_y - \Omega\,\omega_x = 0 \qquad (٩ - ٣٠)$$

لفرز المتغيرات في المعادلتين المذكورتين اعلاه ، نفاضل الاولى بالنسبة للزمن t لنحصل على

$$\ddot{\omega}_x + \Omega\,\dot{\omega}_y = 0$$

وعند حلها للمتغير $\dot{\omega}_y$ وتعويض النتيجة في المعادلة (٩ـ ٣٠) نجد ان

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0 \qquad (٩ـ ٣١)$$

هذه هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة ، وحلها هو

$$\omega_x = \omega_1 \cos (\Omega\, t) \qquad (٩ـ ٣٢)$$

حيث ω_1 تمثل ثابت التكامل ، لكي نجد ω_y تفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للزمن t ثم نعوض النتيجة في المعادلة (٩ ـ ٢٩) ، ويمكننا عندئذ حلها للمتغير ω_y للحصول على

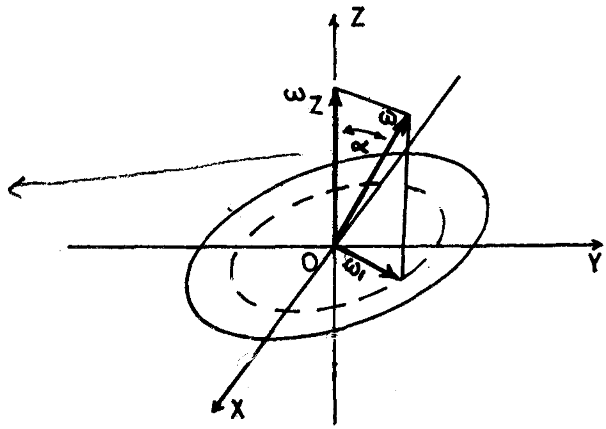
$$\omega_y = \omega_1 \sin (\Omega\, t) \qquad (٩ـ ٣٣)$$

اذن ω_x و ω_y يتغيران توافقيا مع الزمن بتردد زاوى Ω ويختلفان في الطور بمقدار $\pi/2$. لذا يرسم مسقط $\vec{\omega}$ على المستوى xy- دائرة نصف قطرها ω_1 في التردد الزاوى Ω .

ويمكننا تلخيص النتائج السابقة كما يلي : في الدوران الحر لجسم صلد فيه محور تناظر ، يرسم متجه السرعة الزاوية حركة مخروطية (طواف) حول محور التناظر ، والتردد الزاوى لهذا الطواف هو الثابت Ω الذى عرف في المعادلة (٩ ـ ٢٨) . لنفرض ان α تمثل الزاوية بين محور التناظر (المحور z-) ومحور الدوران (اتجاه $\vec{\omega}$) كما هو موضح في الشكل (٩ ـ ١٤) عندئذ يمكننا تمثيل Ω كما يلي

$$\Omega = \left(\frac{I_s}{I} - 1 \right) \omega \cos \alpha \qquad (٩ـ ٣٤)$$

وهذا يعطي المعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر .



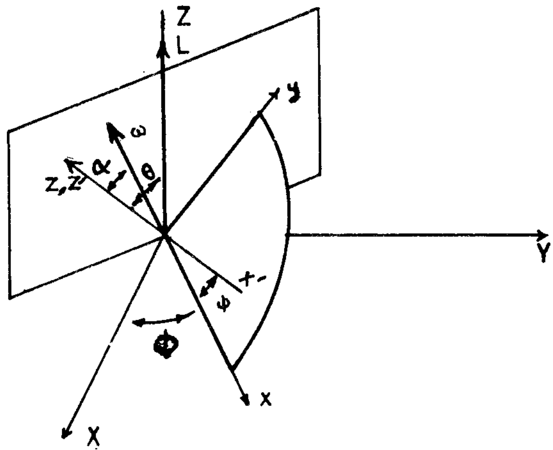
الشكل (٩ـ١٤) متجهات السرعة الزاوية لطواف حر لقرص

وصف دوران جسم صلد بالنسبة لمحاور ثابتة . زوايا اويلر .

في التحليل السابق لدوران جسم صلد حر كانت حركة الطواف منسوبة لمحاور مثبتة في الجسم وتدور معه . ولاجل وصف الحركة بالنسبة لمشاهد خارج الجسم يجب ان نستعمل محاور ثابتة . في الشكل (٩ـ١٥) للمحاور OXYZ توجيه ثابت في الفضاء . والمحاور $Ox'y'z'$ مثبتة في الجسم وتدور معه . وتعرف محاور ثالثة oxyz كما يلي :

ينطبق المحور ـ z على المحور ـ z' او محور تناظر الجسم . والمحور ـ x هو خط تقاطع المستوى ـXY مع المستوى ـ $x'y'$.

وقد مثلت الزاوية بين المحور ـ X والمحور ـx بالرمز ϕ والتي بين z,Z بالرمز θ ويحسب دوران الجسم حول محور التناظر



الشكل (٩ــ١٥) يوضح الشكل العلاقة بين زوايا اويلر وبين المحاور الثابتة والدائرة .

من الزاوية بين المحور - x والمحور - x' والتي تمثل بالرمز ψ .

وتسمى الزوايا الثلاث ϕ, θ , ψ بزوايا اويلر .

وفي الحالة التي لا تؤثر فيها عزوم على الجسم ، يكون متجه الزخم الزاوي $\vec{L}$ ثابتا في المقدار والاتجاه بالنسبة للمحاور الثابتة OXYZ . لنختر المحور - Z باتجاه $\vec{L}$ وهذا يعرف بالخط غير المتقلب invariable من الشكل نرى ان مركبات $\vec{L}$ في المحاور 0 xyz هي

$$L_x = 0$$

$$L_y = L \sin \theta \qquad (٩ــ٣٥)$$

$$L_z = L \cos \theta$$

مرة اخرى نقيد انفسنا في حالة الجسم الذى له محور تناظر (المحور - z) بحيث يكون الجسم الناقص للعزم الدوراني ، ووفقا لذلك تكون المحاور 0xyz محاور رئيسية كالمحاور 0x'y'z' .

عندنا الان من اولى معادلات (٩ ـ ٣٥) ان $\omega_x = 0$. اذن تقع $\vec{\omega}$ في المستوى - yz . لنفرض ان α تمثل الزاوية بين المحور z- والسرعة الزاوية $\vec{\omega}$. فمركبات $\vec{\omega}$ عندئذ تكون

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \omega \sin \alpha \qquad (٩ - ٣٦)$$
$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$

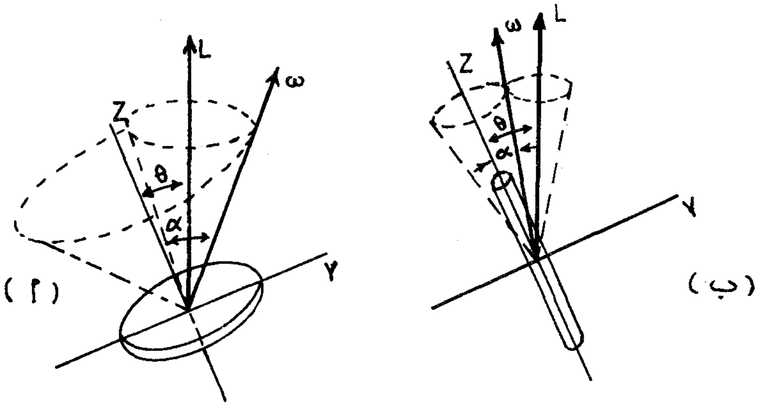
و وفقا لذلك

$$L_x = I_{xx}\omega_x = 0$$
$$L_y = I_{yy}\omega_y = I \omega \sin \alpha \qquad (٩ - ٣٧)$$
$$L_z = I_{zz}\omega_z = I_z \omega \cos \alpha$$

و بسهولة ينتج ان

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan \theta = \frac{I}{I_s} \tan \alpha \qquad (٩ - ٣٨)$$

و وفقا للنتيجة الانفة الذكر تكون θ اصغر او اكبر من α ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان I اصغر او اكبر من I_s على التوالي وبعبارة اخرى يقع متجه الزخم الزاوى بين محور التناظر ومحور الدوران في حالة الجسم المنبسط $(I > I_s)$ بينما في حالة الجسم الذى يستطيل $(I < I_s)$ يقع محور الدوران بين محور التناظر ومتجه الزخم الزاوى . لقد وضحت الحالتان في الشكل (٩ ـ ١٦) . في كل من الحالتين يرسم محور التناظر (المحور - z) عند دوران الجسم ، حركة مخروطية (طواف) حول متجه الزخم الزاوى الثابت $\vec{L}$. وفي الوقت نفسه يطوف محور الدوران (المتجه $\vec{\omega}$) حول $\vec{L}$ بنفس التردد .



الشكل (٩ ـ ١٦) الدوران الحر (أ) لقرص و (ب) لقضيب • وقد ظهر مخروطا الجسم والفضاء منقطة •

بالرجوع الى الشكل (٩ ـ ١٥) ، نرى ان الانطلاق الزاوى لدوران المستوى - yz حول المحور -Z يساوى المعدل الزمني لتغيير الزاوية ϕ . اذن $\dot{\phi}$ تمثل المعدل الزمني لطواف محور التناظر • (والمتجه $\vec{\omega}$) حول الخط غير المتقلب (المتجه $\vec{L}$) كما يرى من الخارج • وواضح من دراسة الشكل ان مركبات $\vec{\omega}$ هي

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \psi \end{aligned} \qquad (٩ ـ ٣٩)$$

ومن ثاني معادلة للمجموعة المذكورة اعلاه والمعادلة الثانية من المعادلات (٩ ـ ٣٣) نجد ان

$$\sin \alpha \qquad (٩ ـ ٤٠)$$

ويمكن وضع المعادلة السابقة بصيغة مفيدة اكثر وذلك بالتعبير عن θ كدالة لـ α بواسطة المعادلة (٩ ـ ٣٨) • ونحصل بعد تبسيطها جبريا على

$$\dot{\phi} = \omega \left[1 + \left(\frac{I_s^2}{I^2} - 1 \right) \cos^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (٩ - ٤١)$$

للمعدل الزمني لطواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب •

امثلـــــــة

١ ـ الطواف الحر للقرص Free Precession of a Disc

كمثال على النظرية السابقة ، لنفرض حالة قرص رقيق ، او اى جسم صفائحي متناظر من نظرية المحاور المتعامدة نحصل على

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$$

ولما كان $I_s = I_{zz}, \; I = I_{xx} = I_{yy}$. اذن

$$2I = I_s$$

وبالتعويض في المعادلة (٩ ـ ٣١) نحصل على

$$\Omega = \left(\frac{2I}{I} - 1 \right) \omega \cos \alpha = \omega \cos \alpha$$

للمعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر ،كما يرى في المحاور الدائرة المثبتة في القرص • اما اذا كان القرص سميكا فعندئذ I_s لا يساوى $2I$ ويختلف المعدل الزمني للطواف من العلاقة السابقة وذلك يعتمد على قيمة النسبة I/I_s .

المعدل الزمني لطواف محور التناظر حول المتجه $\vec{L}$ او المحور z- كما يرى من الخارج يعطى من المعادلة (٩ ـ ٤١) كما يلي :

$$\dot{\phi} = \omega\,(1 + 3\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

وبصورة خاصة اذا كانت α صغيرة جدا بحيث يكون $\cos\alpha \approx 1$ عندئذ نحصل على التقريب

$$\Omega \approx \omega$$
$$\dot{\phi} \simeq 2\omega$$

اذن يطوف محور التناظر في الفضاء تماما بمقدار ضعف الانطلاق الزاوى للدوران • ويظهر هذا الطواف كحركة ذبذبية •

٢ـ طواف الارض الحر Free Precession of the Earth

من المعروف في حركة الارض ان محور الدوران يميل قليلا عن القطب الجغرافي الذى يمثل محور التناظر • والزاوية α تساوى حوالي ٢ر٠ـ ثانية من القوس (كما هو مبين في الشكل ٩ ـ ١٧ المبالغ فيه) ـ كذلك من المعروف ان النسبة I_s/I تساوى حوالي ٠٠٣٢٧ر١ كما حسبت من تفلطح الارض • من المعادلة (٩ ـ ٣٤) نحصل اذن على

$$\Omega = 0.00327\,\omega$$

ولما كانت (يوم $/ \omega = 2\pi$)، فان زمن ذبذبة الطواف الانف الذكر يحسب اذن كما يلي :

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{0.00327}\ \text{days} = 305\ \text{days}$$

وزمن الذبذبة الملاحظة لطواف محور دوران الارض حول القطب يساوى تقريبا ٤٤٠ يوم • ويعزى عدم التوافق بين القيم الملاحظة والمحسوبة الى كون الارض ليست تامة الصلادة •

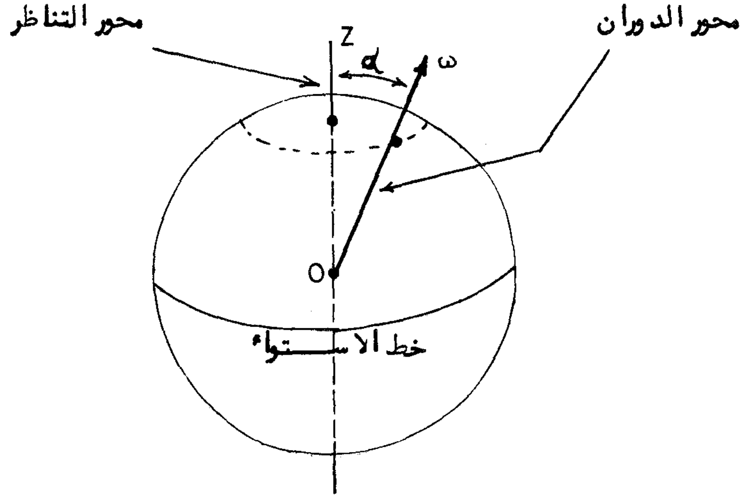
وفي ما يتعلق بطواف محور تناظر الارض كما يرى من الفضاء ، فالمعادلة

(٩ـ ٤١) تعطي $\dot{\phi} = 1.00327\,\omega$

وزمن الذبذبة المرافق عندئذ يكون

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega}\;\frac{1}{1.00327} \simeq 0.997 \text{ day}$$

هذا الطواف الحر لمحور الارض في الفضاء يتداخل من الطواف الجيروسكوبي الاطول بكثير ،حوالي٢٦٠٠٠ سنة ، والاخير ينتج من العزوم التي تؤثر بها الشمس والقمر على الارض (بسبب تفلطحها) . ان حقيقة كون زمن ذبذبة طواف الجيروسكوبي اطول بكثير من الطواف الحر يبرر اهمال العزوم الخارجية لحساب زمن ذبذبة الطواف الحر .



الشكل (٩ـ١٧) محاور التناظر ودوران الارض . الزاوية α المبالغ فيها كثيرا

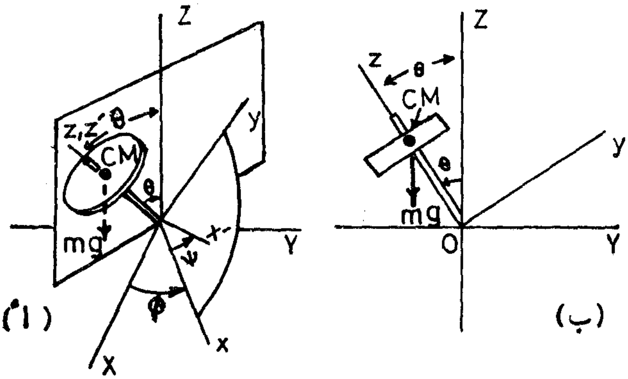
٩ ـ ٩) الطواف الجيروسكوبي ـ حركة الخذروف

Gyroscopic Precession. Motion of a Top.

سندرس في هذا البند حركة الجسم الصلد الذي يدور بحرية حول نقطة

ثابتـة ويؤثر عليـه عـزم ، بدلا من حالـة الطـواف الحـر الذى لا يؤثر عليه عزم • وتبسـط الحالة بمثال الجايرسـكوب البسـيط (او الخذروف) •

الشكل (٩ ـ١٨ آ) يبـين رمـوز محاورنـا ورسـمت المحاور z, y, Z للتوضيـح فقط في الشـكل (٩ـ١٨ ب) حيث المحـور - x عمودى على سطح الورقـة • ونقطـة الاصـل O هي النقطـة الثابتـة التي يدور حولها الجسـم •



الشكل (٩ ـ ١٨) الجايرسـكوب البسـيط

ان مقـدار العزم حول O الناتـج من الثقل هو $mg\ell \sin\theta$ حيث ℓ يمثل المسـافة من O الى مركز الكتلـة O • ويعمل هذا العـزم حول المحور - x اى ان

$$N_x = mg\ell \sin\theta$$

$$N_y = 0 \qquad (٩ ـ ٤٢)$$

$$N_z = 0$$

ولنمثل السـرعة الزاويـة للمحـاور $O\,x\,y\,z$ بالرمز $\vec{\omega}$. وواضح ان مركبات $\vec{\omega}$ بدلالـة زوايا اويلـرهي

$$\omega_x = \dot{\theta}$$
$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \qquad (٩ - ٤٣)$$
$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta$$

اذن مركبات الزخم الزاوي للخذروف المدوم هي

$$L_x = I_{xx}\omega_x = I\,\dot{\theta}$$

$$L_y = I_{yy}\omega_y = I\,\dot{\phi} \sin \theta \qquad (٩ - ٤٤)$$

$$L_z = I_{zz}(\omega_z + \dot{\psi}) = I_s(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_s S$$

هنا نستخدم نفس الرموز لعزوم القصورات الذاتية التي استخدمناها في البند السابق وقد اختصرنا في المعادلة الاخيرة الكمية $\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ بالحرف S والذي يسمى بالتدويم Spin .

معادلة الحركة الاساسية المنسوبة الى محاورنا الدائرة هي

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، بدلالة المركبات ، نحصل على معادلات الحركة التالية

$$mg\ell \sin \theta = I\ddot{\theta} + I_s S\,\dot{\phi} \sin \theta - I\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \qquad (٩ - ٤٥)$$

$$0 = I \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) - I_s S\dot{\theta} + I\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \qquad (٩ - ٤٦)$$

$$0 = I_s \dot{S} \qquad (٩ - ٤٧)$$

ان المعادلة الاخيرة تبين ان تدويم الجسم S ، حول محور التناظر يبقى ثابتا .

بالطبع تكون مركبات الزخم الزاوى على طول نفس المحور ثابتة ايضا •

$$L_z = I_s S = \text{constant} \qquad (٩ - ٤٨)$$

عندئذ المعادلة الثانية تكافئ

$$0 = \frac{d}{dt}\left(I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_s S \cos \theta\right)$$

بحيث

$$I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_s S \cos \theta = B = \text{constant} \qquad (٩ - ٤٩)$$

الطواف المستقر Steady Precession

وقبل ان نتابع تكامل بقية المعادلات ، سوف نشرح حالة خاصة ممتعة وهي الطواف المستقر • في هذه الحالة يرسم محور الجايرسكوب او الخذروف مخروطا دائريا قائما حول المحور الشاقولي (المحور - z) في هذه الحالة $0 = \ddot{\theta} = \dot{\theta}$) ، وتبسط المعادلة (٩ - ٤٥) ، بعد اختصار العامل المشترك $\sin \theta$ الى

$$mg\ell = I_s S \dot{\phi} - I \dot{\phi}^2 \cos \theta$$

اوعند حلها للعامل S ، نجد ان

$$S = \frac{mg\ell}{I_s \dot{\phi}} + \frac{I}{I_s} \dot{\phi} \cos \theta \qquad (٩ - ٥٠)$$

كشرط للطواف المستقر • هنا $\dot{\phi}$ تمثل التردد الزاوى للطواف ،اى ان ،التردد الزاوى للحركة المتناظرة او محور التدويم حول الشاقول ، ولا سيما اذا كانت $\dot{\phi}$ صغيرة جدا ، عندئذ S تكون كبيرة • (هذه هي الحالة الاعتيادية لخذروف اوجايرسكوب) • عندئذ قد يهمل الحد الثاني في يمين المعادلة (٩ - ٥٠) وقد نكتب على وجه التقريب

$$\dot{\phi} \simeq \frac{mg\ell}{I_s S} \qquad (٩ - ٥١)$$

وهذه النتيجة المألوفة في نظرية الجايرسكوب الاولية التي تعطيها معظم كتب الفيزياء العامة • وفي الواقع لما كانت المعادلة (٩ - ٥٠) هي من الدرجة الثانية في $\dot{\phi}$ فهناك قيمتان لـ $\dot{\phi}$ لقيمة معلومة لـ S ، ولكن قيمة التقريب المذكور اعلاه هو الذى يلاحظ اعتياديا •

معادلات الطاقة والترنح The Energy Equation and Nutation

اذا لم تكن هناك قوى احتكاكية تؤثر على الجايرسكوب لتبديد الطاقة فان الطاقة الكلية T + V تبقى ثابتة •

$$\tfrac{1}{2}(I\,\omega_x^2 + I\,\omega_y^2 + I_s S^2) + mg\ell\,\cos\theta = E$$

وما يكافئها بدلالة زوايا اويلر

$$\tfrac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2\,\sin^2\theta + I_s S^2) + mg\ell\cos\theta = E$$

يمكننا حل المعادلة (٩ - ٤٩) لـ $\dot{\phi}$ وتعويضها في المعادلة المذكورة اعلاه والنتيجة تكون

$$\tfrac{1}{2}\,I\dot{\theta}^2 + \frac{(B - I_s S\,\cos\theta)^2}{2\,I\,\sin^2\theta} + \tfrac{1}{2}I_s S^2 + mg\ell\cos\theta = E \qquad (٩ - ٥٢)$$

والتي كليا بدلالة θ . هذه المعادلة تجيز لنا من حيث المبدأ ايجاد θ كدالة للزمن t بطريقة التكامل • ولنعمل التعويض التالي :

$$u = \cos\theta$$

عندئذ $\dot{u} = -(\sin\theta)\dot{\theta} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\dot{\theta}$.ونجد ان

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\,(2E - I_s S^2 - 2mg\ell u)I^{-1} - (B - I_s S u)^2\,I^{-2}$$

او

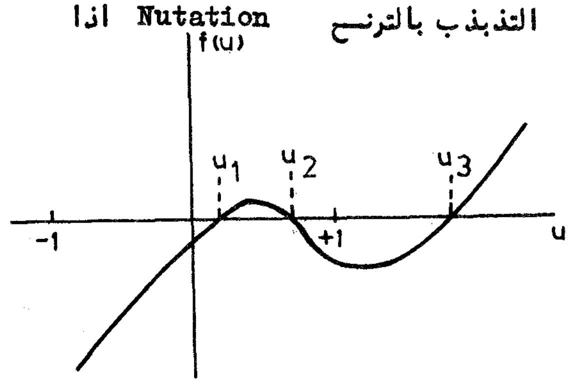
$$\dot{u}^2 = f(u)$$

لذا يمكن ايجاد u (ومنها θ) كدالة للزمن t بالتكامل

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (٩ - ٥٣)$$

الان $f(u)$ هو متعدد الحدود Polynomial من الدرجة الثالثة ، اذن يمكن ايجاد قيمة التكامل بدلالة الدوال الاهليلجية elliptic functions

على اية حال ، لا نحتاج في الحقيقة الى اجراء التكامل لشرح الخواص العامة للحركة . ونرى ان $f(u)$ يجب ان يكون موجبا لكي يكون t حقيقيا . فغايات الحركة في θ تحسب اذن من جذور المعادلة $f(u)=0$. ولما كانت θ يجب ان تقع بين صفر و ٩٠ درجة ، عندئذ يجب ان تأخذ u القيم بين صفر و + ١ . يمثل المنحني في الشكل (٩ ـ ١٩) الدالة $f(u)$ للحالة التي يكون فيها جذران متميزان هما u_1 و u_2 بين صفر و + ١ ، عندئذ تكون قيم θ المناظرة لهما اى θ_1 و θ_2 هي غايات الحركة الشاقولية ويتذبذب محور الخذروف الى الامام والخلف بين هاتين القيمتين للزاوية θ عند طواف الخذروف حول الشاقول الشكل (٩ ـ ٢٠) . ويسمى هذا التذبذب بالترنح Nutation اذا

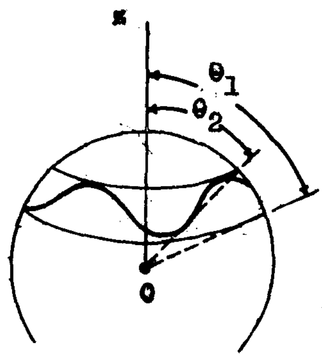


الشكل (٩ـ١٩) بياني الدالة $f(u)$.

كان هناك جذر مزدوج Double root اى اذا كانت $u_1 = u_2$ فعندئذ لا يحصل ترنح ويطوف الخذروف بصورة مستقرة . وفي الحقيقة يعطي شرط الجذر المزدوج من المعادلة (٩ ــ ٥٠) .

الخذروف النائم Sleeping Top

كل من لعب بالخذروف يعرف اذا بدأ بالموضع الشاقولي بسرعة تدويم



الشكل (٩ ــ ٢٠) توضيح لترنح الجايرسكوب البسيط

كافية فمحور الخذروف يبقى ثابتا في الاتجاه الشاقولي ، كشرط لما يسمى بالنائم Sleeping. وبدلالة التحليل السابق ، نرى ان النوم يجب ان يقابل جذر مزدوج في $u = +1$ في هذه الحالة ، لما كانت $0 = \dot{\theta} = \theta$ و

$B = I_s S$ و $E = mgh + \frac{1}{2} I_s S^2$ فالمعادلة

$$f(u) = 0$$

عندئذ تصبح

$$(1 - u)^2 \left[\frac{2mgh}{I}(1 + u) - \frac{(I_s S)^2}{I^2}\right] = 0$$

في الحقيقة ، عندنا جذر مزدوج في $u = +1$. وعند وضع الحد الذى

بين القوسين في المعادلة السابقة مساويا للصفر نحصل على جذر ثالث هو u_3 . ونجد ان

$$u_3 = \frac{I_s^2 S^2}{2 I mgh} - 1$$

اذا كان الجذر u_3 لا يقابل قيمة فيزيائية ممكنة ل θ ، اى اذا كانت u_3 اكبر من واحد ، عندئذ ستكون الحركة النائمة مستقرة . وهذه تعطي

$$S^2 > \frac{4 Imgh}{I_s^2} \qquad (٩ــ٥٤)$$

كمحك لاستقرار الخذروف النائم . فاذا تباطأ الخذروف بسبب الاحتكاك بحيث لا يبقى الشرط المذكور اعلاه صحيحا ، عندئذ يعاني الخذروف ترنحا واخيرا ينقلب

* ٩ ــ ١٠) استخدام المصفوف في ديناميك الجسم الصلد

الكمية الممتدة للقصور الذاتي

Use of Matrices in Rigid Body Dynamics.

The Inertia Tensor

يمكن كتابة معادلات كثيرة من التي استنبطت في هذا الفصل ببساطة وبصورة ملائمة بصيغة المصفوف . فمثلا ، افرض التعبير العام للزخم الزاوى ، المعادلة (٩ ــ ٤) هذه المعادلة بدلالة المصفوف تصبح

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (٩ــ٥٥)$$

هنا ، كما عولجت تحـويلات المحـاور في البنـد (١ ـ ١٥) مثلت المتجهـات بالمصفوفـات العموديـة • المصفـوف ٣ × ٣ الذى يحتوى على العـزوم وضـرب القصـورات الذاتيـة يتضمن الخـواص الكاملـة للجسـم الصلد بالنسـبة الى خواصـه الدورانيـة • وهذا المصفـوف هو طريقـة خاصـة لتمثيل الكميـة الممتـدة للقصـور الذاتي Inertia Tensor .

ولندخل الرمـز المنفـرد I للكميـة الممتـدة للقصـور الذاتي • عنـدئـذ يمكـن التعبير عن الزخـم الزاوى كما يلي :

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \qquad (٩ \text{ ـ } ٥٦)$$

مفهـوم ان المتجهـات $\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ هي مصفوفـات عموديـة

الطاقـة الحركيـة Kinetic Energy

يمكـن البرهنـة بسـهولة على ان التعبير العام للطاقـة الحركية الدورانيـة للجسـم الصلـد ، المعادلـة (٩ ـ ١٢) ، يعطي بدلالـة المصفوف على النحو التالي

$$T=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \qquad (٩ \text{ ـ } ٥٧)$$

او ، بصيغـة مختصـرة

$$T = \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega}^{T}\,I\,\vec{\omega} \qquad (٩ \text{ ـ } ٥٨)$$

هنا المصفوف الانقي $\vec{\omega}^{T}$ هو مصفوف التحويل Transpose matrix للمصفـوف العمـودى $\vec{\omega}$ و I هو الكميـة الممتـدة للقصـور الذى عُرِّف سـابقا •

المحـاور الرئيسـية Principal Axes

اذا كانت المحـاور هي محـاور رئيسـية للجسـم ، فان تمثيـل الكمية الممتدة لمصفوف القصـور الذاتي ياخـذ الصيغـة القطريـة diagonal التاليـة :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \qquad (٩ \text{ـ} ٥٩)$$

ومن الواضح ، ان المسالة العامة لايجاد المحاور الرئيسية للجسم الصلد تكافىء المسالة الرياضية لتحويل المصفوف ٣×٣ الى مصفوف قطرى . ومعروف من نظرية المصفوفات ، ان اى مصفوف مربع متناظر يمكن تحويله الى مصفوف قطرى . في الحالة التي نحن بصددها $I_{xy} = I_{yx}$ وبالتماثل للازواج الاخرى. فالمصفوف اذن هو متناظر ، ولذلك يجب ان يتواجد صف من المحاور الرئيسية في اية نقطة .

ويتم تحويل المصفوف الى مصفوف قطرى بايجاد جذور معادلة المحدد التالية :

$$\left| \vec{I} - \lambda \vec{1} \right| = 0$$

حيث $\vec{1}$ يمثل مصفوف الوحدة unit matrix وتكتب هذه المعادلة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (٩ \text{ـ} ٦٠)$$

وهذه من الدرجة الثالثة في λ ، اى

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad (٩ \text{ـ} ٦١)$$

حيث C, B, A هي دوال بسيطة للـ I's . الجذور الثلاثة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ هي عزوم القصورات الذاتية الرئيسية الثلاثة .

ولكي نجد ميلان المحاور الرئيسية ، نستخدم الحقيقة الفيزيائية وهي انه

عند دوران جسم حول احد محاوره الرئيسية يكون متجه الزخم الزاوى بنفس اتجاه متجه السرعة الزاوية • ولنفرض ان الاتجاهات الزاوية لاحد المحاور الرئيسية هي α ، β ، γ ولنفرض ان الجسم يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ حول هذا المحور فالزخم الزاوى عندئذ يكون

$$\vec{L} = \lambda \vec{\omega} = I \vec{\omega} \qquad (٩ــ٦٢)$$

حيث λ تمثل احد الجذور الثلاثة λ_1 ، λ_2 او λ_3. وتكتب المعادلة السابقة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \lambda\omega\cos\alpha \\ \lambda\omega\cos\beta \\ \lambda\omega\cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\cos\beta \\ \omega\cos\gamma \end{bmatrix} \qquad (٩ــ٦٣)$$

وهذه المعادلة ، تبعا لذلك ، تكافىء المعادلات العددية الثلاث التالية :

$$\begin{aligned} (I_{xx} - \lambda)\cos\alpha + I_{xy}\cos\beta + I_{xz}\cos\gamma &= 0 \\ I_{yz}\cos\alpha + (I_{yy} - \lambda)\cos\beta + I_{yz}\cos\gamma &= 0 \\ I_{zx}\cos\alpha + I_{zy}\cos\beta + (I_{zz} - \lambda)\cos\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (٩ــ٦٤)$$

حيث اختزل العامل المشترك ω . لذلك يمكن ايجاد اتجاهات جيوب التمام للمحاور الرئيسية بحل المعادلات والجذور ليست حره ، من الواضح ، يجب ان تستوفي الشرط التالي :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (٩ــ٦٥)$$

امثلـــــة

١ــ جد الكمية الممتدة للقصور الذاتي لصفيحة مربعة طول ضلعها l وكتلتها m في المحاور $Oxyz$ حيث O في احدى زوايا الصفيحة

والمحــوران x و y على طــول ضلعــين منهــا •
باســتخدام نواتــج المثــال ــ ٣ بنــد (٩ ــ ١) عندنا

$$I_{xx} = I_{yy} = m\ell^2/3 \ , \ I_{zz} = 2m\ell^2/3, \ I_{xy} = -m\ell^2/4, \ I_{xz} = I_{yz} = 0$$

اذ ن الكميــة الممتدة للقصــور الذاتي هي

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} m\ell^2/3 & -m\ell^2/4 & 0 \\ -m\ell^2/4 & m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2/3 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٢ــ جــد الزخــم الزاوى للصفيحــة المذكــورة اعلاه عندمــا تــدور حول احـــــد اقطارها • في هذه الحالة يمكن التعبير عن متجــه الســرعة الزاويــة بالمصفوف العمودى التالي :

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega/\sqrt{2} \\ \omega/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والزخم الزاوى • وفقا لذلك هو

$$\vec{L} = \mathbf{I}\,\vec{\omega} = \frac{m\ell^2\omega}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m\ell^2\omega}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2\omega}{12\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٣ـ جـد الطاقـة الحركية للدوران في المسـألة السـابقة بأسـتعمال النواتج السـابقة ، عندنـا

$$T = \tfrac{1}{2}\omega^T \vec{I}\omega = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^T\vec{L} = \frac{m\ell^2\omega^2}{24}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2\omega^2}{12}$$

٤ـ جـد عـزوم القصور الذاتي الرئيسـية لصفيحـة مربعة حول احدى زواياهـــا

هنا المعادلة (٩ ـ ٦٠) تصبـح

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2-\lambda & -\frac{1}{4}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

او

$$\left[\left(\tfrac{1}{3}m\ell^2-\lambda\right)^2-\left(\tfrac{1}{4}m\ell^2\right)^2\right]\left(\tfrac{2}{3}m\ell^2-\lambda\right) = 0$$

العامل الثاني يعطي

$$\lambda = \tfrac{2}{3}m\ell^2$$

لاحـد عـزوم القصـور الذاتي . العامل الاول يعطي

$$\tfrac{1}{3}m\ell^2-\lambda = \pm\tfrac{1}{4}m\ell^2$$

او

$$\lambda = \frac{7}{12} m \ell^2$$

و

$$\lambda = \frac{1}{12} m \ell^2$$

وقيم λ الثلاث هذه هي العزوم الرئيسية الثلاثة ٠

٥ ــ جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمسالة المذكورة اعلاه

المعادلات (٩ ــ ٦٤) تعطي

$$(\tfrac{1}{3} m\ell^2 - \lambda) \cos\alpha - \tfrac{1}{4} m\ell^2 \cos\beta = 0$$

$$-\tfrac{1}{4} m\ell^2 \cos\alpha + (\tfrac{1}{3} m\ell^2 - \lambda) \cos\beta = 0$$

$$(\tfrac{2}{3} m\ell^2 - \lambda) \cos\gamma = 0$$

ومن المعادلة الاخيرة نرى ان $\gamma = 90^\circ$ هي احد الجذور ٠ واذا وضعنا λ تساوى $\frac{1}{12} m\ell^2$ ، فان المعادلة الاولى تصبح

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0$$

وهذه مع المعادلة (٩ ــ ٦٥) تعطي

$$2\cos^2\alpha = 1$$

او ، باخذ الجذر الموجب ، عندنا $\alpha = 45^\circ$ لمحور رئيسي واحد ٠ الاخر يعطي باخذ الجذر السالب ، اى ان $\alpha = 135^\circ$ اذن يكون احد المحاور الرئيسية على طول القطر ، والاخر عموديا على القطر وفي مستوى الصفيحة ، والمحور الرئيسي الثالث يكون عموديا على مستوى الصفيحة ٠

تمـــــــــارين

١ـ صفيحـة مسـتطيلة الشـكل منتظمة كتلتها m وضلعاها a و b تـدور حول احد قطريهـا بانطـلاق زاوى ω • جـد مقدار واتجاه الزخم الزاوى حـول زاويـة محـور الـدوران •

٢ـ جـد مقدار واتجـاه الزخـم الزاوى حول المركز في السـؤال السـابق

٣ـ قرص دائرى منتظم كتلته m ونصف قطره a مقيـد الدوران بانطلاق زاوى ثابت ω حول محور يمر من المركز ويصنـع زاويـة ٤٥ مع محـور القرص • جد اتجـاه ومقـدار الزخم الزاوى

٤ـ جـد عزوم وضرب القصـورات الذاتية لمتوازى مسـتطيلات منتظم اطـوال اضلاعـه a, b, c لمحاور نقطـة اصلها في احدى الزوايا والمحـاور على طول حافـات متوازى المسـتطيلات • واذا كان متوازى المسـتطيلات يـدور حـول احد اقطاره ، جـد الزخم الزاوى حول نقطـة الاصـل •

٥ـ حل السـؤال السـابق عندمـا تكـون نقطـة اصل المحـاور في مركز متـوازى المسـتطيلات والمحاور عموديـة على اوجهـه •

٦ـ جد عزوم وضـرب القصـورات الذاتيـة لصفيحـة مثلثـة منتظمـة AOB اذا كانت الزاويـة في O تسـاوى 90° والاضـلاع $OA=a$, $OB=b$ تقـع على المحـورين x, y •

٧ـ جـد المحاور الرئيسـية للصفيحـة في السـؤال السـابق

٨ـ جـد معادلات المجسـمات الناقصـة للعزوم لما يلي : (أ) قرص دائـرى منتظم نصف قطره a و (ب) اسـطوانة دائريـة قائمـة صلدة نصف قطرهـا a وطولهـا b. استـخدم محاور تقـع نقطـة اصلهـا في المركز لكل حالـة •

٩ـ في الجـزء (ب) للمسـالة السـابقة ، ما هي نسـبة نصف القطر الى الطول لكي يكـون المجسـم الناقص للعزم كرة ؟

١٠ـ متوازي مستطيلات صلد منتظم ، اضلاعه a و $2a$ و $3a$. ما هي نسب الاقطار الرئيسية للمجسم الناقص للعزم في مركز متوازي المستطيلات ؟

١١ـ جد عزوم القصور الذاتي الرئيسية لكرة صلدة نصف قطرها a و فيها جوف كروي نصف قطره $a/2$ و مركزه في نقطة تبعد $a/4$ من مركز الكرة . (جد العزوم في مركز الكرة و في مركز الكتلة)

١٢ـ جد الطاقة الحركية الدورانية في المسالتين (٩ ـ ١) و (٩ ـ ٣)

١٣ـ برهن على ان الطاقة الحركية للدوران كما اعطيت في المعادلة (٩ ـ ١٢) تساوي $\frac{1}{2} I \omega^2$ و ذلك باستخدام المعادلة (٩ـ١٤) و العلاقات

$$\omega_x = \omega \cos \alpha \; , \; \omega_y = \omega \cos \beta \; , \; \omega_z = \omega \cos \gamma$$

١٤ـ جد مقدار و اتجاه العزم المسلط على الجسم من المحور الساند في التمرينين (٩ ـ ١) و (٩ ـ ٣)

١٥ـ صفيحة اعتباطية الشكل تدور بحرية تحت تاثير عزم يساوي صفرا . اثبت باستخدام معادلات اويلر ان المركبة ω_1 للسرعة الزاوية في مستوى الصفيحة (المستوى - xy) تكون ثابتة بالمقدار ، و لو ان مركبة z للسرعة الزاوية ω ليست من الضروري ان تكون ثابتة (تنبيه استخدم نظرية المحاور المتعامدة) . ما نوع الصفيحة التي تعطي $\omega_z = \text{constant}$

١٦ـ صفيحة مربعة طول ضلعها a تدور بحرية بدون تاثير عزم . اذا كان محور الدوران يصنع زاوية 45° مع محور تناظر الصفيحة . جد زمن ذبذبة طواف محور الدوران حول محور التناظر و زمن ذبذبة طواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب للحالتين. (أ) صفيحة رقيقة و (ب) صفيحة سمكها $a/4$.

١٧ـ اشتق المعادلتين (٩ ـ ٢٣) و (٩ ـ٢٥) مباشرة من معادلات اويلر ، (تنبيه : ضع معادلات اويلر للحالة التي تكون فيها العزم يساوي صفرا ثم اضرب الاولى بـ ω_x والثانية بـ ω_y والثالثة بـ ω_z واجمع المعادلات الثلاث)

١٨ـ املاء الخطوات التي تؤدي الى استنباط المعادلة (٩ ـ ٤١) •

١٩ـ جسم صلد له محور تناظر ، يدور بحرية حول نقطة ثابتة بدون تاثير عزم • اذا كانت الزاوية بين محور التناظر و المحور الانـي للدوران هي α • برهن على ان الزاوية بين محور الدوران و الخط غير المتقلب (متجه $\vec{L}$) هي :

$$\tan^{-1}\left[\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I_s + I\tan^2\alpha}\right]$$

حيث I_s (عزم القصور الذاتي حول محور التناظر) هو اكبر من I (عزم القصور الذاتي حول المحور العمودي على محور التناظر) اثبت ان هذه الزاوية لا يمكن ان تتعدى ($8^{-\frac{1}{2}}$) $\tan^{-1}$.

٢٠ـ جد الزاوية بين $\vec{\omega}$ و $\vec{L}$ للحالتين في تمرين (١٦)

٢١ـ جد نفس الزاوية للارض .

٢٢ـ جسم صلد يدور بحرية حول مركز كتلته • لا توجد هناك عزوم موثرة • اذا كانت جميع القصورات الذاتية الرئيسية الثلاثة مختلفة اثبت بواسطة معادلات اويلر ان دوران الجسم سوف يكون مستقرا حول المحور الذى له اعظم عزم قصور ذاتي او المحور الذى له اصغر عزم قصور ذاتي • اما اذا كان الدوران حول المحور المتوسط لعزم القصور الذاتي فدوران الجسم سوف لا يكون مستقرا (يمكن توضيح ذلك بقذف كتاب في الهواء بعد لفه بخيط مرن) •

٢٣ـ قرص فضائي دائرى الشكل ، رقيق نصف قطره a وكتلته m يدور في الفضاء بانطلاق زاوى ω حول محور تناظره • فاذا ضرب نيزك حافة القرص و اعطاه دفع $\hat{P}$ وكان اتجاه $\hat{P}$ موازيا لمحور القرص • جد محصلة حركة القرص •

٢٤ــ جسم صلد له محور تناظر و يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ في حركة ذات ابعاد ثلاثة حول مركز كتلته • حيث يسلط عليه عزما احتكاكيا $-c\vec{\omega}$ كالذي قد يحدث من سحب الهواء (أ) اثبت ان مركبة $\vec{\omega}$ باتجاه محور التناظر تتناقص اسيا exponentially مع الزمن (ب) اثبت ايضا ان الزاوية بين السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ و محور التناظر تتناقص بصورة مستمرة اذا كان عزم القصور الذاتي حول محور التناظر هو اعظم عزم رئيسي •

٢٥ــ جايروسكوب بسيط يتكون من قرص دائرى ثقيل كتلته m ونصف قطره a مثبت في مركز قضيب رفيع كتلته $m/2$ وطوله a • اذا دوم الجايروسكوب بمعدل زمني معين S بحيث صنع محوره زاوية ٤٥° مع العمود • اثبت ان هناك قيمتين ممكنتين للمعدل الزمني للطواف $\dot{\phi}$ بحيث يطوف الجايروسكوب بصورة مستمرة بقيمة ثابتة لـ $\theta = 45^\circ$. جد قيمتين عدديتين لـ $\dot{\phi}$ عندما يكون $S = 900$ rpm , $a = 10$ cm .

٢٦ــ اذا بدأ الجايروسكوب في التمرين السابق باطلاقه بزاوية $\theta_1 = 45^\circ$ و $\dot{\phi} = 0$ وبنفس التدويم بدلا من طوافه بصورة مستمرة بزاوية ثابتة θ . اكتب معادلة الطاقة وجد الغاية الاخرى لـ θ_2 التي يصنعها محور الجايروسكوب مع العمود عند ترنحه •

٢٧ــ دوم قلم رصاص بموضع عمودى • ما هو اسرع تدويم يجب ان تصله بالدوران بالدقيقة • لكي يبقى القلم في موضعه العمودى • افرض ان القلم عبارة عن قضيب منتظم طوله ٢٠ سم و قطره ٨ مم •

٢٨ــ اذا قيد محور تدويم الجايروسكوب بحيث يبقى في مستو افقي على سطح الارض • ولكنه حر يؤشر باى اتجاه في ذلك المستوى • اثبت ان دوران الارض ينتج عنه عزم يحاول ان يوجه الجايروسكوب باتجاه خط الشمال ــ الجنوب • وهذا هو اساس البوصلة الجيروسكوبية •

٢٩ ـ جد الكمية الممتدة للتصور الذاتي لمكعب صلد منتظم ضلعه a لمحاور نقطة اصلها (أ) في مركز المكعب (ب) في احد زوايا المكعب

٣٠ـ جد الكمية الممتدة للتصور الذاتي لمتوازي مستطيلات صلد منتظم اضلاعه a, 2a, 4a لمحاور نقطة اصلها في احدى الزوايا وعندما تكون المحاور على امتداد حواف متوازي المستطيلات ٠

٣١ـ استخدم طريقة الصفوف لايجاد الزخم الزاوي و الطاقة الحركية للمكعب في التمرين (٩ ــ ٢٩) ، عندما يدور المكعب حول القطر الطويل و المار في المركز ٠ اعمل نفس الشئ في التمرين (٩ ــ ٣٠)

٣٢ـ جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمكعب في التمرين (٩ ــ ٢٩) و(ب) المكعب في التمرين (٩ ــ ٣٠) ٠

الفصـل العاشـر

معادلات لاكرانـــج

Lagrange's Equations

سوف نضاف الان الى تطبيق قوانين نيوتن المباشر على حركة المنظومات البسيطة طريقة عامة اكثر متعة - لقد اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي جوزيف لويس لاكرانج Joseph Louis Lagrange طريقة ممتازة و مفيدة لايجاد معادلات حركة جميع المنظومات الديناميكية •

١٠ ـ ١) الاحداثيات المعممة Generalized Coordinates

رأينا ان موضع الجسيم في الفضاء يمكن تعيينه تعينا كاملا بثلاث احداثيات • وقد تكون هذه ، ديكارتيه ، كروية ، اسطوانية ،او في الحقيقة اية ثلاثة برمترات مختارة بصورة ملائمة • ونحتاج الى احداثيان فقط اذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستوِ او سطح ثابت • بينما اذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم او منحني ثابت فعندئذ يكفي احداثي واحد •

في حالة منظومة متكونة من N من الجسيمات نحتاج بصورة عامة الى 3N من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة ـ الشكل العام configuration للمنظومة • اما اذا فرضت قيود على المنظومة ، فنحتاج الى عدد من الاحداثيات اقل من 3N لتعيين الشكل العام للمنظومة • فمثلا ، اذا كانت المنظومة عبارة عن جسم صلد فعندئذ نحتاج فقط الى موضع نقطة ملائمة تتخذ مرجعا في الجسم (مثلا مركز الكتلة) و ميلان الجسم في الفضاء لتعيين الشكل العام ونحتاج في هذه الحالة الى ستة احداثيات فقط = ثلاث للنقطة المرجعية و ثلاث اخرى (مثل زوايا اويلر) للميلان •

و يتطلب بصورة عامة اصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة • و سوف نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز

$$q_1, q_2, \cdots, q_n$$

والتي تسمى بالاحداثيات المعممة generalized coordinates. قد يكون الاحداثي q_k زاوية او مسافة ، فاذا كان بالاضافة الى تعيين شكل المنظومة العام ، بامكان اى احداثي ان يتغير بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى فعندئذ يقال عن المنظومة بانها هولونومك holonomic وفي هذه الحالة يساوى عدد الاحداثيات n عدد درجات الحرية degrees of freedom للمنظومة .

وفي منظومة ليست هولونومك ، لا تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة عن بعضها البعض ، اى ان عدد درجات الحرية تكون اقل من عدد الاحداثيات الاصغر اللازم لتعيين الشكل . وكمثال على منظومة ليست هولونومك الكرة المقيدة لتدحرج على مستو تام الخشونة . حيث يتطلب هنا خمسة احداثيات لتعيين الشكل العام اثنان منها لموضع مركز الكرة وثلاث لميلانها . ولكن لا يمكن ان تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة لانه ، اذا تدحرجت الكرة فعلى الاقل يجب ان يتغير احداثيان . وفي بحثنا الحالي ، سوف نعتبر فقط منظومات الهولونومك.

اذا كانت المنظومة متكونة من جسيم واحد ، فيمكن كتابة الاحداثيات الديكارتيه كدوال للاحداثيات المعممة على النحو التالي :

درجة حرية واحدة ــ الحركة على منحن

$$x = x(q)$$

درجتا حرية ــ الحركة على سطح

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \end{aligned}\right\}$$

ثلاث درجات حرية . الحركة في الفضاء

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\}$$

افرض ان الاحداثيات $q's$ تتغير من القيم الابتدائية $(q_1, q_2 \dots\dots)$ الى القيم المجاورة $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)$. فالتغييرات التي تقابلها في الاحداثيات الديكارتيه هي كما يلي :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots\dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots\dots$$

وهكذا المشتقات الجزئية $\partial x / \partial q_1$ وهلم جرا ، هي دوال للاحداثيات $q's$. وكمثال خاص ، افرض حركة جسيم في مستو لنختر المحاور القطبية

$$q_1 = r \qquad q_2 = \theta$$

عندئذ

$$x = x(r , \theta) = r \cos \theta$$

و

$$y = y(r , \theta) = r \sin \theta$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \, \delta r - r \sin \theta \, \delta \theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \, \delta r + r \cos \theta \, \delta \theta$$

تعطي التغييرات في x و y الناتجة عن تغييرات صغيرة في r و θ . افرض الان ان منظومة تتكون من عدد كبير من الجسيمات ، لنفرض ان هذه المنظومة لها n درجات حرية واحداثياتها المعممة $q_1 , q_2 , \dots\dots\dots q_n$ عندئذ فهي تتغير من الشكل $q_1, q_2, \dots\dots q_n$

الى الشكل المجاور $(q_1 + \delta q_1, \dots q_n + \delta q_n)$ فيتحرك الجسيم i من نقطة مثل (x_i, y_i, z_i) الى النقطة المجاورة $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ حيث

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

فالمشتقات الجزئية هي مرة اخرى دوال للاحداثيات q's سوف نتبنى الاصطلاح الذى يلزم الرمز i ليشير الى المحاور الديكارتيه والحرف k ليشير الى الاحداثيات المعممة • ونتبنى ايضا الرموز الملائمة والتي تلزم الرمز x_i ليشير الى اى المحاور الديكارتيه • اذن لمنظومة تتكون من N من الجسيمات i ستأخذ القيم من 1 الى $3N$.

١٠ ــ ٢) القوى المعممة Generalized Forces

اذا عانى جسيم ازاحة $\delta \vec{r}$ تحت تاثير قوة $\vec{F}$ نعلم ان الشغل δW المنجز من القوة عندئذ يكون

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

وبدلالة رموزنا التي تبنيناها توا يكون الشغل

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i \qquad \text{١٠ ــ ١}$$

وواضح ان العلاقة المذكورة اعلاه لا تصح لجسيم واحد فقط ، وانما تصح كذلك لمنظومة متكونة من عدد كبير من الجسيمات • لجسيم واحد تاخذ i القيم من واحد الى ثلاثة • وتمتد i لـ N من الجسيمات من واحد الى $3N$ •

لنعبر الان عن الزيادة δx_i بدلالة المحاور المعممة ، عندئذ

$$\delta W = \sum_i \left(F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k\right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k\right)$$

وعند عكس ترتيب المجموع نحصل على

$$\delta W = \sum_k \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \delta q_k$$

ويمكن كتابة هذه على النحو التالي :

$$\delta W = \sum_k Q_k \, \delta q_k \qquad (١٠ـ٢)$$

حيث

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \qquad (١٠ـ٣)$$

الكمية Q_k المعرفة بالمعادلة المذكورة اعلاه تسمى بالقوة المعممة المرافقة للاحداثي q_k • ولما كان لحاصل الضرب $Q_k \delta q_k$ وحدات الشغل عندئذ تكون وحدات Q_k وحدات قوة اذا كانت q_k تمثل مسافة ووحدات عزم اذا كانت q_k تمثل زاوية •

اعتياديا ، ليس من الضروري ، وغير عملي استخدام المعادلة (١٠-٣) لحساب قيمة Q_k الحقيقية ، فبدلا من ذلك يمكن ايجاد كل قوة معممة Q_k مباشرة من حقيقة كون $Q_k \delta q_k$ يمثل الشغل المنجز على المنظومة من القوى الخارجية عندما يتغير الاحداثي q_k بمقدار δq_k (تبقى بقية الاحداثيات المعممة ثابتة) . فمثلا ، اذا كانت المنظومة جسما صلدا ، فالشغل المنجز من القوى الخارجية عندما يدور الجسم خلال زاوية $\delta\theta$ حول محور معلوم هو $L_\theta \delta\theta$ حيث L_θ هو مقدار العزم الكلي لجميع القوى حول المحور . وفي هذه الحالة تكون L_θ هي القوى المعممة المرافقة للاحداثي θ .

القوى المعممة للمنظومات الحافظة

راينا في الفصل الرابع ان المركبات المتعامدة للقوة المؤثرة على جسيم في مجال قوة حافظ تعطي كالاتي

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

حيث V هي دالة طاقة الجهد . ووفقا لذلك تصبح علاقتنا للقوة المعممة كما يلي

$$Q_k = -\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

والتعبير بين القوسين هو المشتقة الجزئية للدالة V بالنسبة للاحداثي q_k. اذن

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (١٠-٤)$$

فمثلا اذا استخدمنا المحاور القطبية $q_1=r$, $q_2=\theta$ فعندئذ تصبح القوى المعممة $Q_r=-\partial V/\partial r$, $Q_\theta=-\partial V/\partial\theta$ اذا كانت V هي دالة لـ r فقط (قوة مركزية) فعندئذ $Q_\theta = 0$.

١٠-٣ معادلات لاكرانج Lagranges Equations

لكي نجد المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الاحداثيات المعممة يمكن ان نبتدئ بالمعادلة

$$F_i = m_i\ddot{x}_i$$

ونحاول كتابتها مباشرة بدلالة الاحداثيات المعممة $q's$ ولكن هناك طريقة اخرى تعتمد على فرضيات الطاقة يكون استخدامها اسهل سنحسب اولا الطاقة الحركية T بدلالة المحاور الديكارتية ثم سنعبر عنها عندئذ كدالة للاحداثيات المعممة ومشتقاتها بالنسبة للزمن . اذن ، الطاقة الحركية T لمنظومة تتكون من N من الجسيمات والتي عرضنا عنها في السابق كما يلي

$$T = \sum_{i=1}^{N}\left[\tfrac{1}{2}m_i\ (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\right]$$

سوف تكتب ببساطة الان كما يلي :

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \tfrac{1}{2}\, m_i\dot{x}_i{}^2 \qquad (١٠\_٥)$$

حيث الاحداثيات الديكارتية x_i هي دوال للاحداثيات المعممة q_k . وللتعميم سوف نشمل ايضا امكانية احتواء العلاقة الدالية بين $x's$ و $q's$ على الزمن t بوضوح . وهذه هي الحالة اذا كانت هناك مقيدات متحركة كجسيم مقيد ليتحرك على سطح ، هو نفسه ، يتحرك بطريقة ما . يمكننا كتابة

$$x_i = x_i\ (q_1, q_2, \ldots. q_n,\ t)$$

اذن

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (١٠\_٦)$$

في المعادلة المذكورة اعلاه وكل ما يتبع ، ما لم نذكر العكس ، سوف نفرض ان مدى i هو $3N, \ldots, 2, 1$ حيث تمثل N عدد الجسيمات في المنظومة ، ومدى k هو $n \ldots\ldots, 3, 2, 1$ حيث n هو عدد الاحداثيات المعممة (درجات الحرية) للمنظومة . ومن معاينة المعادلة السابقة

نرى ان بامكاننا اعتبار T كدالة للاحداثيات المعممة ، مشتقاتها بالنسبة للزمن ، وقد تكون دالة للزمن وواضح من علاقة $\dot{x}_i$ ان

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \tag{١٠ـ٧}$$

لنضرب الان بـ $\dot{x}_i$ ونفاضل بالنسبة للزمن t. عندئذ نحصل على :ـ

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

او

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

تنتج الخطوة الاخيرتين امكانية عكس ترتيب التفاضل بالنسبة للزمن t و q_k او $\dot{q}_k$. ثم اذا ضربنا بـ m_i ووضعنا $m_i \ddot{x}_i = F_i$ يمكننا كتابة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right)$$

اذن باخذ المجموع على i نجد ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{١٠ـ٨}$$

واخيرا من تعريف القوة المعممة Q_k نحصل على النتيجة التالية :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{١٠ـ٩}$$

هذه هي معادلات الحركة التفاضلية في الاحداثيات المعممة • وتسمى بمعادلات لاكرانج للحركة •

في الحالة التي تكون فيها الحركة محافظة بحيث $Q'=$ تعطى من المعادلة (١٠ـ٤) ، فعندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي :

(١٠ـ١٠)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

وتلطم المعادلات اكثر عند تعريف دالة مثل L تسمى بدالة لاكرانج مبحيث

$$L = T - V$$

ومفهوم ان V, T هي دوال للاحداثيات المعممة • اذن ، لما كانت $V = V(q)$ و $\partial V / \partial \dot{q} = 0$ نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}\ , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي

(١٠ـ١١)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

اذن يمكن استنباط المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محافظة بسهولة اذا عرفنا دالة لاكرانج بدلالة محاور مناسبة •

اذا كان قسم من القوى المعممة غير محافظ ولنقل Q_k' والقسم الاخر يمكن اشتقاقه من دالة جهد مثل V فيمكننا كتابة

(١٠ـ١٢)

$$Q_k = Q_k' - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

عندئذ يمكننا ايضا تعريف دالة لاكرانج $L = T-V$ ونكتب المعادلات التفاضلية

للحركة على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (١٠\text{ـ}١٣)$$

ان الصيغة المذكورة اعلاه مناسبة للاستخدام ، مثلا عند تواجد قوى احتكاكية .

١٠ــ٤ بعض تطبيقات معادلات لاكرانج

Some Appliations of Lagrange's Equations

سوف نوضح في هذا البند تعدد استخدامات معادلات لاكرانج الجديرة بالملاحظة وذلك بتطبيقها على عدد من الحالات الخاصة . والطريقة العامة لايجاد المعادلات التفاضلية لمنظومة هي كما يلي :

١ــ اختر محاور مناسبة لتمثيل شكل المنظومة العام .

٢ــ جد الطاقة الحركية T كدالة لهذه المحاور ومشتقاتها بالنسبة للزمن

٣ ــ اذا كانت المنظومة محافظة ، جد الطاقة الكامنة V كدالة للاحداثيات او اذا كانت المنظومة غير محافظة ، جد القوى المعممة Q_k.

٤ــ المعادلات التفاضلية للحركة يمكن ان تعطى عندئذ من المعادلات (١٠ــ٩) (١٠ــ١١) أو (١٠ــ١٣) .

المتذبذب التوافقي Harmonic Oscillator

خذ بنظر الاعتبار حالة متذبذب توافقي ذو بعد واحد وافرض ان هناك قوة تضاؤل تتناسب مع السرعة ، فالمنظومة اذن غير محافظة . اذا كانت x تمثل احداثي الازاحة ،عندئذ تصبح دالة لاكرانج كالاتي :

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2} kx^2$$

حيث m تمثل الكتلة و k برمتر المرونه الاعتيادى .

اذن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

ولتاجد قوة غير محافظة يمكن استخدام معادلات لاكرانج بصيغة المعادلة (١٠ ــ ١٣) • وهكذا فان $Q' = -c\dot{x}$ ومعادلة الحركة تصبح •

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -c\dot{x} + (-kx)$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

هذ معادلة المتذبذب التوافقي المتضائل المعروفة والتي درسناها سابقا •

جسيم منفرد في مجال مركزى

لنجد معادلات لاكرانج للحركة لجسيم يتحرك في مستو تحت تاثير قوة مركزية • سوف نختار الاحداثيات القطبية $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. عندئذ

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

المشتقات الجزئية المناسبة هي كما يلي :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

فمعادلات الحركة ، اى المعادلات (١٠ ــ ١١) ، هي اذن

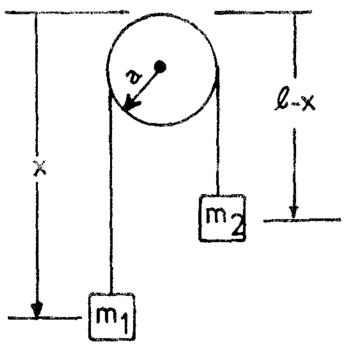
$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

وهذه مماثلة للمعادلات التي استنبطناها في البند (٦ــ٧) لحركة جسيم

في مجـــــال مركـزي •

ماكـنة اتـود Atwood's Machine

منظومة ميكانيكية تسمى بماكنة اتود تتكون من ثقلين كتلتيهما m_1 و m_2 على التتالي • وقد ربطتا بحبل خفيف غير قابل للمد والبسط طوله ℓ ويمر على بكرة (الشكل ١٠ ــ ١) • للمنظومة درجة حرية واحدة • سوف نفرض ان المتغير x يمثل شكل المنظومة العام •حيث x هي المسافة العمودية من البكرة الى الكتلة m_1 كما هو مبين في الشكل



الشكل ١٠ ــ ١ ماكنة اتود

و واضح ان الانطلاق الزاوى للبكرة هو $\dot{x}/a$ حيث a يمثل نصف القطر اذن الطاقة الحركية للمنظومة هي

$$T = \tfrac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للبكرة وتعطى الطاقة الكامنة كما يلي

$$V = -m_1gx - m_2g\ (\ell - x)$$

اذا اهملنـا الاحتكـاك ، فـدالـة لاكـرانـج تكـون كما يلي :

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2})\ \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)\ x + m_2 g \ell$$

و من معادلـة لاكرانـج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

نحصـل على

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2})\ \ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$

او

$$\ddot{x} = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/a^2}$$

و هذا هـو تعجيل المنظومـة . اذا كانت $m_1 > m_2$ نلاحظ ان m_1 تهبـط بتعجيـل ثابت ، بينما اذا كانت $m_1 < m_2$ عندئذ ترتفـــع m_2 بتعجيـل ثابت . و الحـد I/a^2 في المقـام يبيـن تاثير التصـور الذاتي للبكرة .

ماكنـة اتـود المـزدوجـة The Double Atwood Machine

افرض المنظومـة المبينـة في الشـكل (١٠ ــ ٢) . هنـا اسـتبدلنااحدى ثقلـي ماكنـة اتود البسـيطة ببكـرة اخـرى تحمل ثقليـن مربوطـين بحبل اخـر للمنظومـة الان درجتان من درجات الحريـة . سـوف نعين شـكلها العـــام بالاحداثيين x و x' كما هـو مبين في الشـكل . لنهمـل كتلتي البكرتـين في هذه الحالـة للسـهولة . عندنا

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \tfrac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{x}')^2$$

$$V = -m_1 gx - m_2 g(\ell - x + x') - m_3 g(\ell - x + \ell' - x')$$

حيث m_1 ، m_2 ، m_3 تمثل الكتل الثلاث و ℓ ، ℓ' تمثل طولي حبلـــــي

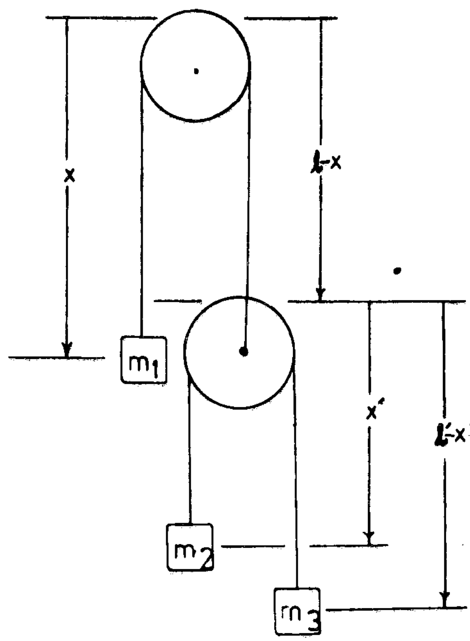
التوصيل . عندئذ

$$L = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \tfrac{1}{2}m_3(\dot{x} + \dot{x}')^2 + g(m_1-m_2-m_3)x$$

$$+ g(m_2 - m_3)x' + \text{constant}$$

و معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$



الشكل (١٠ـ ٢) ماكنة اتود المركبة

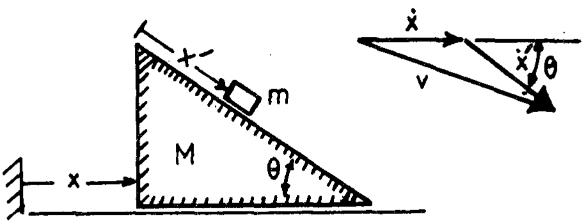
$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_1 - m_2 - m_3)$$

$$m_2(-\ddot{x} + \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_2 - m_3)$$

و منهما يمكن ايجاد التعجيلين $\ddot{x}$ و $\ddot{x}'$ بواسطة الجبر البسيط .

جسيم ينزلق على سطح مائل متحرك

لنفرض حالة جسيم ينزلق على سطح مائل املس الذى ينزلق بحرية على سطح افقي املس ، كما هو مبين فى الشكل (١٠ ــ ٣) ، فى هذه المسألة هناك درجتان من درجات الحرية ، لذلك نحتاج الى احداثيين لتعيين



الشكل (١٠ ــ ٣) متوازى مستطيلات ينزلق اسفل سطح مائل متحرك .

الشكل العام تعيينا كاملا . سنختار الاحداثيين x و x' ، لازاحة السطح الافقية من نقطة مرجعية ، و لازاحة الجسيم من نقطة مرجعية على السطح المائل على التتالي ، كما هو مبين .

من دراسة مخطط السرعة ، المبين فى يمين الشكل ، نرى ان مربع انطلاق الجسيم يعطى من قانون الجيب تمام .

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta$$

اذن الطاقة الحركية T للمنظومة هي كما يلي

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2$$

حيث M تمثل كتلة السطح المائل ، و θ زاوية الاسفين كما هو مبين و m هي كتلة الجسيم . الطاقة الكامنة للمنظومة لا تحتوى على x لان المستوى يتحرك على سطح افقي . اذن يمكننا كتابة

$$V = -mgx'\sin\theta + \text{constant}$$

و

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgx'\sin\theta + \text{constant}$$

معادلات الحركـــــة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

عندئذ تصبح

$$m(\ddot{} + \ddot{x}'\cos\theta) + M\ddot{x} = 0$$

$$m(\ddot{x} \quad \ddot{x}\cos\theta) = mg\sin\theta$$

عند حلهـا للتعجيلـين $\ddot{x}$ و $\ddot{x}'$ نجـد ان

$$\ddot{x} = \frac{-g\sin\theta\cos\theta}{\frac{m+M}{m} - \cos^2\theta} \qquad \ddot{x}' = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{m\cos^2\theta}{m+M}}$$

و يمكن الحصـول على النتيجـة المذكـورة اعـلاه من تحليل القوى و ردود فعـل المنظومـة ، و لكن هذه الطريقـة مضجـرة اكثر من طريقـة معادلات لاكرانج المذكورة اعـلاه ٠

اشـــتقاق معادلات اويلـر لجســم صلـد حـر الدوران

يمكن اســـتخدام طريقـة لاكرانـج لاشـتقاق معادلات اويلر لحركـة جســم صلـد ٠ في هذا البنـــد ســنفرض حالـة جسـم صلـد يـدور بدون تاثير عـزوم

راينا ان الطاقـة الحركيـة لجسـم صلـد تعطي من

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2)$$

حيث الســرع الزاويـة ω's منســوبة الى محاور الجســم الرئيسـية ٠ و لنعد الى الشـكل (٩ ــ ١٥) الذى يبين زوايا اويلـر θ ، ψ ، ϕ. من دراســة الشـكل نرى ان العلاقـة بين السـرع الزاوية ω's و زوايا اويلـر و مشـتقات ازمانهـــا هي كما يلي :ــ

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \qquad (١٠ \_ ١٤)$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

وعند اعتبار زوايا اويلر كاحداثيات معممة تصبح معادلات الحركة كالاتي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

لان جميع القوى المعممة Q's تساوى صفرا ، الان ، من قانون التسلسل

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \omega_z$$

اى ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \dot{\omega}_z \qquad (١٠ \_ ١٥)$$

وبالتماثل

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = I_{xx} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} + I_{yy} \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi}$$

$$= I_{xx} \omega_x (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)$$

$$+ I_{yy} \omega_y (-\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)$$

$$= I_{xx}\omega_x\omega_y - I_{yy}\omega_y\omega_x \qquad (١٠ - ١٦)$$

ومن المعادلتين (١٠ ـ ١٥) و (١٠ـ١٦) ، المعادلة Ψ تصبح

$$I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) = 0$$

والتي سبق ان راينا (البند ٩ ـ ٦) بانها تمثل احدى معادلات اويلر لحركة جسم صلد بدون تاثير عزوم . ويمكن الحصول على المعادلتين الاخريين من التبديل الدوري للاحداثيات z, y, x ويكون هذا صحيحا لاننا لم نعين اى محاور ديكارتيه خاصة كما يفضل .

١٠ـ ٥) الزخوم المعممة . الاحداثيات المهملة

Generalized Momenta. Ignorable Coordinates

افرض حركة جسيم منفرد يتحرك على خط مستقيم (حركة خطية) لطاقته الحركية تكون

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2$$

حيث m تمثل كتلة الجسيم ، و x احداثي موضعه . والان بدلا من تعريف زخم الجسيم P بحاصل الضرب $m\dot{x}$ يمكننا تعريف P بالكمية $\partial T/\partial \dot{x}$ ، اى

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

في حالة منظومة توصف بالاحداثيات المعممة $q_1, q_2 \ldots q_k \ldots q_n$ الكميات P_k المعرفة بما يلي :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (١٠ - ١٧)$$

تسمى بالزخوم المعممة[1] . عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرنج للمنظومة المحافظة كما يلي

---

(1) اذا كانت دالة الطاقة الكامنة V لا تحتوى $\dot{q}$'s بشكل ظاهر ، عندئذ

$$P_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = \partial T/\partial \dot{q}_k$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (١٠ - ١٨)$$

افرض وبصورة خاصة ان احد الاحداثيات مثل q_λ لا يحتويه L بشكل ظاهر • عندئذ

$$\dot{P}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (١٠ - ١٩)$$

و

$$P_\lambda = \text{constant} = C_\lambda \qquad (١٠ - ٢٠)$$

في هذه الحالة يسمى q_λ بالاحداثي المهمل ignerable فالزخم المعمم المرافق للاحداثي المهمل اذن يكون ثابت حركة المنظومة •

فمثلا ، في مسالة الجسيم الذي ينزلق على سطح مائل (بحث في البند السابق) • راينا ان دالة لاكرانج L لا تحتوى على الاحداثي x ، موضع السطح • اذن يكون x احداثي مهمل في هذه الحالة •

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{x}' \cos\theta = \text{constant}$$

وفي الحقيقة يمكننا ان نرى ، ان P_x هو المركبة الافقية الكلية للزخم الخطي للمنظومة ، ولما كانت لا توثر قوة افقية خارجية على المنظومة ، فالمركبة الافقية للزخم الخطي يجب ان تكون ثابتة •

مثال اخر على الاحداثي المهمل يتواجد في حالة حركة جسيم في مجال مركزى • في الاحداثيات القطبية

$$L = \tfrac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

كما هو مبين في المثال في البند (٠ ـ ٤) • في هذه الحالة تكون θ هي الاحداثي المهمل ، و

$$P_\theta = \frac{L}{\theta} = mr^2\,\theta = \text{constant}$$

هنا P_θ هو مقدار الزخم الزاوى •

* ١٠ ـ ٦) معادلات لاكرانج للقوى الدافعة

Lagrange's Equations for Impulsive Forces

افرض ان لدينا منظومة داينا ميكية موصوفة بالاحداثيات المعممة q_k فيها جميع القوى المعممة المسلطة Q_k تكون صفرا باستثناء فترة زمنية قصيرة τ . يمكننا تكامل معادلات لاكرانج كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

$$\int_0^{\tau} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial q_k}\, dt + \int_0^{\tau} Q_k\, dt$$

الان اذا كانت Q_k تقترب من اللانهاية بطريقة بحيث ان الدفع المعمم

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} Q_k\, dt = \hat{p}_k \qquad (١٠ ـ ٢١)$$

يتواجد و يكون محدودا ، عندئذ التكامل $\int_0^{\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) dt$ يقترب من الصفر لان الكمية $\partial T/\partial q_k$ تبقى محدودة . يمكننا اذن كتابة

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \hat{p}_k$$

للتغيرات في الكميات $\partial T/\partial \dot{q}_k$ نتيجة تطبيق الدفع المعمم $\hat{p}_k$ على المنظومة للمنظومات التي لا تحتوي فيها دالة الجهد V على $\dot{q}$'s بشكل ظاهر بحيث $\partial T/\partial \dot{q}_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = p_k$ ، يمكننا كتابة المعادلة (١٠ ـ ٢٢) كما يلي :

$$\Delta p_k = \hat{P}_k \qquad (١٠ ـ ٢٣)$$

حيث P_k هو الزخم المعمم المرافق للاحداثيات المعممة q_k .
يمكن ايجاد الدفوع المعممة $\hat{P}_k$ بكل بساطة من حساب الشغل الدفعي $\delta\hat{W}$ الذى يعطي من

$$\delta\hat{W} = \hat{\vec{P}}_a \cdot \delta\vec{s}_a + \ldots = \hat{P}_1 \ \delta q_1 + \hat{P}_2 \ \delta q_2 + \ldots$$

$$= \sum_k \hat{P}_k \ \delta q_k \qquad (١٠ \_ ٢٤)$$

حيث $\hat{\vec{P}}_a$ .... هي الدفوع المسلطة و $\delta\vec{s}_a$ .... هي ازاحات اعتباطية صغيرة من خلالها تعمل القوى الدافعة المسلطة (خاضعة الى مقيدات المنظومة) .

مثال

قضيبان AB و BC طول كل منهما $2a$ وكتلته m وصلا بمفصل ناعم في B ووضعا على طاولة افقية ملساء بحيث تقع النقاط C,B,A على خط مستقيم . جد الحركة مباشرة بعد ان سلط دفع $\hat{P}$ في النقطة A كما هو مبين في الشكل (١٠ _ ٤)

لنختر الاحداثيات المعممة x, y, θ_1, θ_2 حيث x و y هي احداثيات موضع المفصل في B و θ_1 و θ_2 هما الزاويتان اللتان يصنعهما القضيبين مع الخط الابتدائي ABC على التتالي . فالطاقة الحركية T للحركة الابتدائية تعطي من

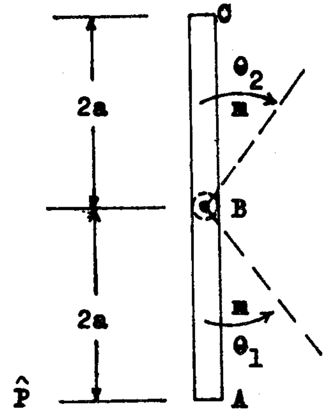
$$T = \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x} + a\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x} + a\dot{\theta}_2)^2,$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\dot{\theta}_2^2 + m\dot{y}^2$$

حيث I_{cm} يمثل عزم القصور الذاتي لأى من القضيبين حول مركز كتلته .
الان ، الشغل الدفعي يساوى $\hat{p}\,\delta s$ حيث

$$\delta s = \delta x + 2a\,\delta\theta_1$$

اذن

$$\delta\hat{W} = \hat{P}\,\delta s = \hat{P}\,(\delta x + 2a\,\delta\theta_1)$$



الشكل (١٠ــ ٤) دفع مسلط على احد طرفي قضيب متصل بقضيب آخر .

ولكـن للازاحة العامة للمنظومة ، عندما

$$\delta\hat{W} = \hat{P}_x\,\delta x + \hat{P}_y\,\delta y + \hat{P}_{\theta_1}\,\delta\theta_1 + \hat{P}_{\theta_2}\,\delta\theta_2$$

اذن ، للحالة التي نحن بصددها

$$\hat{P}_x = \hat{P} \qquad \hat{P}_y = 0 \qquad \hat{P}_{\theta_1} = 2a\hat{P} \qquad \hat{P}_{\theta_2} = 0$$

ان الحركة الابتدائية للمنظومة تعطي من المعادلات (١٠ــ ٢٢) .

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \hat{P}_x : \quad m(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + m(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) = \hat{P}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \hat{P}_\theta : \quad ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + I_{cm}\dot{\theta}_1 = 2a\hat{P}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \hat{P}_{\theta_2} : \quad ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) + I_{cm}\dot{\theta}_2 = 0$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2}\right) = \hat{P}_y \; : \; m\dot{y} = 0$$

وبتعويض $I_{cm} = \frac{1}{3} ma^2$ وبحلها للسرع ، نحصل اخيرا على

$$\dot{x} = -\frac{\hat{P}}{m} \qquad \dot{y} = 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{9}{4}\frac{\hat{P}}{am} \qquad \dot{\theta}_2 = \frac{3}{4}\frac{\hat{P}}{am}$$

ويجب على القارىء ان يتحقق من ان النتيجة السابقة تعطي $\vec{v}_{cm} = \hat{\vec{P}}/m$ حيث $\vec{v}_{cm}$ هي سرعة مركز كتلة المنظومة

(١٠ ـ ٧) قاعدة التغيير لهملتن

Hamilton's Variational Principle

لحد الان ، ارتكزت دراستنا في الميكانيك بصورة واسعة على قوانين نيوتن للحركة . وفي الحقيقة ، في الجزء الاول من هذا الفصل ، عندما استنبطنا معادلات لاكرانج استخدمنا قانون نيوتن الثاني في احدى الخطوات :للمعادلة (١٠ـ٨) . وفي هذا البند سوف نستقصي طريقة إخرى لاستنباط معادلات لاكرانج هذه الطريقة تستند على فرضية اثبتت شموليتها بنتائجها قاعدة التغيير لهملتن

اعلنت هذه القاعدة في ١٨٣٤ من قبل رياضي اسكتلندي يسمى سير وليم هملتن Sir William R. Hamilton وهي تنص على ان حركة اي منظومة تحدث بطريقة بحيث ان التكامل

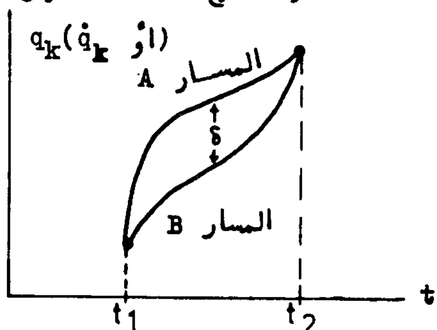
$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

ياخذ دائما اعظم او اصغر Extreme قيمة ، حيث ان $L=T-V$ يمثل دالة لاكرانج للمنظومة . وبعبارة اخرى ، تنص قاعدة هملتن على انه

باستثناء جميع الطرق الممكنة التي يمكن ان تتغير فيها منظومة في فترة زمنية معينة t_2-t_1 فهناك حركة خاصة سوف تحدث ، التي يكون فيها التكامل المذكور اعلاه في نهايته العظمى او الصغرى • و يمكن التعبير عن هذا النص رياضيا بالصيغة التالية :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \qquad (١٠ \_ ٢٥)$$

حيث δ تمثل تغييراً صغيراً • و ينتج هذا التغيير من اخذ الطرق المختلفة للتكامل بتغيير الاحداثيات المعممة و السرع المعممة كدوال للزمن t الشكل (١٠_٥)



الشكل (١٠ _ ٥) • توضيح لتغيير q_k او $\dot{q}_k$

ولكي نثبت ان معادلات لاكرانج للحركة تشتق مباشرة من المعادلة المذكورة اعلاه ، لنحسب التغيير بوضوح على فرض ان L تكون دالة معروفة للاحداثيات المعممة q_k و مشتقاتها الزمنية $\dot{q}_k$ • عندنا

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt$$

الان δq_k تساوى الفرق بين دالتين للزمن t و مختلفتين قليلا • اذن

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k$$

اذن ، عند تكامل الحد الاخير بطريقة التجزئة ، نجد ان

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta\dot{q}_k\,dt=\left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k d$$

و لكن لقيمتين ثابتتين للغايتين t_1 و t_2 يكون التغيير $\delta q_k=0$ في t_1, t_2

اذن يتلاشى الحد المتكامل و ينتج عن ذلك ان

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right]\delta q_k dt=0 \qquad (١٠ـ٢٦)$$

الان ، اذا كانت جميع الاحداثيات المعممة q_k مستقلة عندئذ تكون تغييراتها δq_k ايضا مستقلة . اذن يجب ان يتلاشى كل حد بين قوسين ، في التكامل لكي يتلاشى التكامل نفسه . اذن

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,......n)$$

هذه هي تماما معادلات لاكرانج للحركة التي وجدناها في السابق .

فرضنا في الاشتقاق المذكور اعلاه تواجد دالة جهد اي ان المنظومة التي نحن بصددها تكون محافظة . يمكن جعل طريقة التغيير بحيث تتضمن المنظومات غير المحافظة وذلك باستبدال L في تكامل التغيير بالكمية $T+W$ حيث W هو الشغل المنجز من جميع القوى ، محافظة كانت أم غير محافظة . عندئذ تدخل القوة المعممة Q_k كما عرفت سابقا ،المعادلة (١٠ـ٢) ، و يقودنا نفس الاسلوب المذكور اعلاه الى الصيغة العامة لمعادلات لاكرانج ، المعادلة (١٠ ـ ٩) .

١٠ ـ ٨) دالـة هملتن • معـادلات هملتـن

The Hamiltonian Function. Hamilton's Equations

افرض الدالـة التاليـة للاحداثيـات المعممـة

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

فالطاقـة الحركيـة T لمنظومـات ديناميكيـة بسـيطة هي دالـة متجانسـة من الدرجـة الثانيـة في الـ $q's$ والطاقـة الكامنـة V هي دالـة في الـ $q's$ فقط • بحيث ان $L = T(q_k , \dot{q}_k) - V(q_k)$

والان من نظريـة اويلـر للـدوال المتجانسـة(٢) عندنا

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

اذن

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = 2T - (T - V) = T + V \qquad (١٠\text{ـ}٢٧)$$

اى ان الدالـة H تسـاوى الطاقـة الكلية من نـوع المنظومات التي فرضناهـا

افرض اننا ناخـذ بنظر الاعتبار حلول المعادلات n التاليـة

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1,2,\dots n)$$

لـ $\dot{q}'s$ بدلالة الـ $p's$ و $q's$ اى

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k (p_k , q_k)$$

---

(٢) تنص نظريـة اويلر لدالة متجانسـة f من درجة n في المتغييرات $x_1, x_2 \dots x_r$ اى ان

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = nf$$

بهذه المعادلات يمكننا عندئذ ان نعبر عن H كدالة ل p's وال q's

$$H(p_k\ ,\ q_k) = \sum_k p_k\dot{q}_k\ (p_k\ ,\ q_k) - L \qquad (١٠ - ٢٨)$$

لنحسب تغيير الدالة H الذى يقابل تغيير q_k ، p_k عندنا

$$\delta H = \sum_k \left[p_k\ \delta\ \dot{q}_k + \dot{q}_k\ \delta\ p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \delta\ \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\ \delta\ q_k \right]$$

و يختصر في داخل القوسين الحد الاول مع الحد الثالث لان $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ من التعريف • كذلك ، لما كانت معادلات لاكرانج يمكن كتابتها كالاتي : $\dot{p}_k = \partial L/\partial q_k$ فيمكننا كتابة

$$\delta H = \sum_k \left[\dot{q}_k\, \delta\, p_k - \dot{p}_k\ \delta\ q_k \right]$$

و الان التغير في H يجب ان يعطى من المعادلة

$$\delta H = \sum_k \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\ \delta\ p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\ \delta\ q_k \right]$$

و ينتج من هذا ان

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$(١٠ - ٢٩)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

هذه المعادلات تسمى بمعادلات هملتن القانونية للحركة

Hamilton's canonical equations of motion

و هي تتكون من 2n من المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى مبينما تتكون معادلات لاكرانج من n من المعادلات من الدرجة الثانية ، لقد استنبطنا معادلات هملتن للمنظومات المحافظة البسيطة • و يمكن البرهنة

على ان المعـــادلات (١٠ ــ ٢٩) تصح ايضا للمنظومـــات الاكثر عموميـــةكالمنظومات غير المحافظـــة ، اى المنظومـــات التي تحتـــوى فيها دالـــة الطاقـــة الكامنـــــــة على الـ $\dot{q}'s$ وللمنظومـــات التى يحتوى فيها L على الزمـــن بوضـــوح ، ولكـــن ليس من الضـــرورى فى هذه الحـــالات ان تكـــون الطاقة الكلية مساوية الى H .

وســـوف يصـــادف الطالب معـــادلات هملتـــن عندما يدرس الميكانيـــك الكمـــي (النظريـــة الاســـاسية للظاهـــرة الذريـــة) وهنـــاك تطبيقـــات ايضـــا لمعـــادلات هملتـــن فى الميكانيك الســـماوى

امثلـــــــــــــــــة

١ــ اشـــتق معـــادلات هملتـــن للحركـــة لمتذبذب توافقـــي احادى البعد ، عندنا

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad V = \tfrac{1}{2} kx^2$$

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{P}{m}$$

اذن

$$H = T + V = \frac{1}{2m} P^2 + \tfrac{1}{2} k x^2$$

فمعـــادلات الحركـــة

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = - \dot{P}$$

عندئذ تصبح

$$\frac{P}{m} = \dot{x} \qquad kx = -\dot{P}$$

المعادلة الاولى عبـــارة عن نـــص ثان للعلاقـــة بين الســـرعة والزخـــم في هـــــذه الحالة ، وعنـــد اســـتعمال المعادلة الاولى ، يمكن كتابة الثانية كما يلى :

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

او عند اعادة ترتيب الحـــدود نحصـــل على

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

و هذه معادلـــة المتذبذب التـــوافقي المعروفـــة

٢ـــ جـــد معادلات هملتـــن لحركـــة جسـيم في مجـــال مركـــزي ٠

هنـــا عندنـــا

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

بالاحداثيـــات القطبيـــة ٠ اذن

$$P_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

$$P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

و وفقـــا لـــذلك

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

معـــادلات هملتـــن

$$\frac{\partial H}{\partial P_r} = \dot{r} \, , \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{P}_r \, , \quad \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \dot{\theta} \, , \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{P}_\theta$$

عـــندئذ تصبـــح

$$\frac{P_r}{m} = \dot{r}$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{P_\theta^2}{mr^3} = -\dot{P}_r$$

$$\frac{P_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$

$$0 = -\dot{P}_\theta$$

تظهر المعادلتان الاخرتان ثبوت الزخم الزاوى اى

$$P_\theta = \text{constant} = mr^2\,\dot{\theta} = h$$

و منها المعادلتان الاوليتـان يعطيـان

$$m\ddot{r} = \dot{P}r = \frac{h^2}{mr^3} + F_r$$

لمعادلـة الحركـة القطبيـة ، حيث $F_r = -\,\partial V(r)/\,\partial r$

*١٠ـ ٩) ، معـادلات لاكـرانج للحركـة المقيـدة

Lagrange's Equations of Motion with Constraints

من المناسب في بعض الاحيـان التعبير عن المعادلات التفاضليـة للحركة لمنظومة مقيـدة بدلالـة عـدد من الاحداثيـات اكثر من الحاجـة الحقيقيـة ، عندئذ يجب ان تكـون المعادلات التفاضليـة منسجمة compatible ايضا مـع المعادلـة او معـادلات ، المقيـد الذى قد يكـون بصيغـة معادلات شـرطية من النـوع

$$g(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0 \qquad (١٠ـ٣٠)$$

وبتفاضلهـا نحصـل على الصيغـة التفاضليـة لشـرط المقيـد

$$\sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0 \qquad (١٠ـ٣١)$$

هناك ايضا انواع معينة للمقيدات تكون فيها العلاقة التفاضلية من النوع

$$\sum_k h_k \, \delta q_k = 0 \qquad (١٠ - ٣٢)$$

التي يمكن ايجادها ولكن هذه المعادلات لا يمكن تكاملها لتعطي المعادلة الشرطية من النوع $f(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0$. مقيدات كهذه يقال عنها بانها ليست هولونومك nonholonomic بينما اذا كان المقيد على شكل المعادلة (١٠ - ٣٠) فيسمى هولونومك .

على اية حال ، سواء كانت المقيدات هولونومك او ليست هولونومك فمن الممكن ايجاد المعادلات التفاضلية للحركة بالصيغة اللاكرانجية وذلك باستخدام طريقة المضروبات غير المعينة undetermined multipliers. من الملائم في هذا التطبيق استعمال قاعدة التغيير لهملتن .

لنضرب المعادلة التفاضلية للمقيد ، المعادلة (١٠ - ٣٢) ، بالبرمتر λ . وهذا يمثل المضروب غير المعين الذي قيمته غير معروفة لحد الان . فاذا اضيف التعبير الناتج الى التكاملية للمتغير التكاملي في المعادلة (١٠-٢٦) فمن الواضح ان النتيجة لا تتغير من ناحية تلاشي التكامل ، اي

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k \, \delta q_k \right) dt = 0$$

وبسبب المقيد ، $n - 1$ فقط من n يمكن اعتبارها حرة من الكميات δq_k .
نختار الان قيمة للبرمتر λ بحيث يتلاشى احد الحدود بين القوسين ، مثل الحد الاول . عندئذ يمكن اعتبار الحدود $n-1$ المتبقية مستقلة . ووفقا لذلك ، يجب ان تتلاشى الحدود المتبقية بين القوسين ايضا . اذن يمكننا كتابة

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (١٠ - ٣٣)$$

$$\sum_k h_k \dot{q}_k = 0 \qquad (٣٤ــ١٠)$$

نتجت المعادلة الاخيرة من قسمة المعادلة التفاضلية ذات المقيد ، المعادلة (١٠ ــ ٣٢) على δt . هناك الان ما مجموعه $n+1$ من المعادلات التفاضلية اذن يمكن ايجاد $n + 1$ من الكميات λ ، $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

و يمكن التوسع في هذه الطريقة لكي تحتوي على اكثر من معادلة واحدة فقط ذات مقيد و ذلك باضافة مضروبات غير معينة اكثر مع ما يقابلها من الـ h's الى معادلات لاكرانج • و يمكن البرهنة على ان معادلات الحركة كما اعطيت اعلاه تطبق ايضا عندما تكون المقيدات متحركة • و للتوسع في معالجة هذه الطريقة على القارئ ان يراجع كتابا متقدما (٢)

See, for example E.T. Whittaker, Analytical Dynamics, Cambridge University press, Cambridge, 1937. or C. Lanczos, The Variational principles of Mechanics, University of Toronto press, Toronto, 1949.

تمـــــــــارين

يجب استخدام طريقة لاكرانج لحل التمارين التالية ، ما لم يذكر خلاف ذلك .

١٠ـ ١) . جد تعجيل كرة صلدة منتظمة تتدحرج اسفل سطح تام الخشونة ، اذا علمت ان السطح ثابت و يميل بزاوية θ مع الافق .

١٠ـ ٢) كرة كتلتها m تتدحرج اسفل اسفين متحرك كتلته M و زاويته θ . فاذا كان الاسفين ينزلق بحرية على سطح افقي املس و كان التلامس بين الكرة و الاسفين تام الخشونة جد تعجيل الاسفين .

١٠ـ٣) ينزلق جسيم على سطح مائل املس ، ميله θ يزداد بمعدل زمني ثابت ω . فاذا كانت $\theta=0$ في الزمن $t = 0$ ، و هو زمن بداية حركة الجسيم من السكون ، جد حركة الجسيم اللاحقة .

١٠ـ ٤) قالبان كتلتاهما متساويتان و مقدار كل منهما m ربطا بحبل خفيف غير قابل للمط . فاذا وضع احد القالبين على طاولة افقية ملساء و علق القالب الاخر على حافة الطاولة . جد تعجيل المنظومة .

١٠ ـ ٥) حل تمرين (١٠ ـ ٤) للحالة التي يكون فيها الحبل ثقيلا كتلته m' .

١٠ـ ٦) جد حركة قذيفة في مجال جاذبية منتظم ، بدون مقاومة الهواء

١٠ ـ ٧) ضع معادلات الحركة لمزدوجة ـ مزدوجة ماكنة اتود التي تتكون من ماكنة اتود واحدة (كتلتاهما m_1 و m_2) مربوطتين بحبل خفيف يمر على بكرة الى ماكنة اتود ثانية كتلتاها m_3, m_4 اهمل كتل جميع البكرات . جد التعجيلات الحقيقية للحالة $m_1 = m, m_2 = 4m$. $m_3 = 2m, m_4 = 3m$

١٠ـ ٨) . اثبت ان طريقة لاكرانج تعطى اتوماتيكيا معادلات الحركة الصحيحة لجسيم يتحرك في مستوفي محاور دائرة Oxy (تلميح $T= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$

حيث $(F_y = -\partial V/\partial y,\ F_x = -\partial V/\partial x,\ \vec{V}=\hat{i}(\dot{x}-\omega y)+\hat{j}(\dot{y}+\omega x)$

١٠ــ ٩) حل التمرين السابق مرة ثانية للحركة في ثلاثة ابعاد

١٠ــ١٠) جد المعادلات التفاضلية لحركة (بندول مرن) الذى يتكون من جسيم كتلته m مربوط بوتر مرن صلابته k وطوله غير المسطط يساوى ℓ_0 . افرض ان الحركة تحدث في مستو شاقولي • استخدم المحاور القطبية r ، θ واثبت ان المعادلات التفاضلية تختصر الى معادلة البندول البسيط عندما تكون r ثابتة والى معادلة نابض متذبذب بسيط عندما تكون $\dot{\theta}$ = ثابت = صفر

١٠ــ ١١) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الاسطوانية R , ϕ , z . استخدم العلاقة

$$v^2 = v_R^2 + v_\phi^2 + v_z^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

١٠ــ١٢) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الكروية ϕ , θ , r .استخدم العلاقة

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta\dot{\phi}^2$$

١٠ــ١٣) ارتفعت نقطة استناد بندول بسيط بتعجيل ثابت a بحيث كان ارتفاعها يساوى $\frac{1}{2}at^2$ وسرعتها الشاقولية هي at . جد المعادلة التفاضلية لحركة بندول ذبذباته صغيرة بطريقة لاكرانج • اثبت ان زمن ذبذبة البندول هي $2\pi\left[\ell/(g+a)\right]^{\frac{1}{2}}$ حيث ℓ يمثل طول البندول.

١٠ــ١٤) اذا كانت نقطة استناد بندول بسيط تتحرك باتجاه افقي بتعجيل ثابت a جد معادلة الحركة و زمن الذبذبة لذبذبات صغيرة •

١٠ــ ١٥) استخدم طريقة لاكرانج لايجاد المعادلات التفاضلية للحركة لبندول كروى في المحاور الكروية •

١٠ ـ١٦) جد المعادلات التفاضلية لحركة بندول كروى مرن ، كما في التمرين ١٠ ـ ١٠ .

١٠ ـ ١٧) جد المعادلات التفاضلية لحركة جسيم مقيد الحركة على مخروط دائرى ـ قائم املس علما بان محور المخروط فى وضع شاقولي .

١٠ ـ ١٨) اثبت في التمرين السابق انه عندما يعطى الجسيم حركة ابتدائية سيتذبذب بين دائرتين افقيتين على المخروط . (تنبيه : استخدم المحاور الكروية مع $\Theta =$ ثابت) . اثبت ان $\dot{r}^2 = f(r)$ حيث $f(r)=0$ له جذران يعرّفان الغايتين التي يجب ان يبقى الجسيم بينهما .

١٠ ـ ١٩) قضيبان متماثلان AC, BC كتلة كل منهما m وطوله $2a$ ربطا بمفصل ناعم في النقطة B . ووضع القضيبان في حالة سكون على طاولة افقية ملساء وكان كل منهما عمودى على الاخر فى البداية . فاذا سلط دفع P فى النقطة A وعلى طول القضيب AB. جد حركة المنظومة مباشرة بعد تسليط الدفع .

١٠ ـ ٢٠) اثبت ان دالة لاكرانج

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - q\,\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

تعطي المعادلة الصحيحة لحركة جسيم فى مجال كهرومغناطيسي ، اى

$$m\ddot{\vec{r}} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

حيث

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

(تسمى الكمية المتجهة $\vec{A}$ بمتجه الجهد والكمية العددية ϕ بالجهد العددى)

١٠ ـ ٢١) جد (أ) الزخم المعمم و (ب) دالة هملتن H لدالة لاكرانج المذكورة في تمرين (١٠ ـ ٢٠)

١٠ــ ٢٢) جد وحل معادلات هملتن القانونية ل (أ) تذبذبة ببعدين (ب) بندول بسيط

١٠ــ ٢٣) ضع معادلات هملتن لبندول كروى

١٠ــ ٢٤) تحقق من ان التكامل $\int L\,dt$ ياخذ قيمة عظمى وصغرى لحالة جسم يسقط فى مجال جاذبية منتظم : لحل هذا التمرين ، افرض ان $y(t)=y_0-\frac{1}{2}gt^2$ وقارن ناتج التكامل مع القيمة التى استنتجت من اخذ دالة تختلف قليلا عن $y(t)$.

الفصـــل الحادي عشـــــر

Theory of Vibrations نظرية التذبذب

الحالات البسيطة للمنظومات التي يمكنها ان تتذبذب حــول وضــع تـــــوازن configuration of equilibrium تشتمل على البندول البسيط، الجسيم المربوط بنابض مرن، البندول الفيزيائي وما الى ذلك، جميع هذه الحالات لها درجــة حريـــة واحدة ، تتصف بتذبذب احادي التردد • عندما نفرض منظومات اكثر تعقيداً ــ منظومات لها عدة درجات حرية ــ سوف نجد انها لاتتصف بتردد واحد بل يحتمل حدوث عدة ترددات مختلفة • وعند دراستنا للمنظومات المتذبذبة ، سوف نجد من المناســـــب استخدام الاحداثيات المعممـــة واستخدام طريقة لاكرانج لايجاد معادلات الحركـــــة بدلالة هذه الاحداثيات •

(١١ــ١) الطاقة الكامنة والتوازن ــ الاستقرار

Potential Energy and Equilibrium. Stability

قبل ان نبدأ بدراسة حركة منظومة حول وضع توازن، لنختبر باختصار التوازن نفسه • افرض ان منظومة لها n درجة حرية ، وان الاحداثيات المعممة q_1 ، $q_2 \dots q_n$ تعين الوضع تعينا كاملا • سوف نفرض ان المنظومة محافظة وان الطاقة الكامنـــــة V هي دالة للاحداثيات q's فقط • اي

$$V = V(q_1, q_2, \dots q_n)$$

راينا ان القوى المعممة Q_k تعطى من

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \dots n) \qquad (١١ــ١)$$

يعرف وضع التوازن بانــه الوضع الذي تتلاشى فيــه جميع القوى المعممـــة ، اي

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (١١ــ٢)$$

تحتوى هذه المعادلات على الشرط الضرورى للمنظومة لكي تبقى في حالة سكون ، اذا كانت في البدء في حالة سكون . لكن اذا ازيحت المنظومة ازاحة صغيرة فقط فقد تعود او لاتعود الى حالة التوازن واذا ازيحت منظومة ازاحة صغيرة وحاولت دائما العودة الى التوازن ، يكون التوازن مستقرا ، staole وعدا ذلك يكون التوازن غير مستقر unstable (اذا كانت المنظومة لاتحاول الحركة نحو التوازن او بعيد منه ، يسمى التوازن بالمستمر neutral)الكرة الموضوعة (١) في قعر وعاء كروى (٢) على قمة وعاء كروى (٣) على سطح مستو هي امثلة على التوازن المستقر ، غيرالمستقر والمستمر على التتالي .

لنر كيف تدخل دالة الطاقة الكامنة V في الشرح . افرض ان دفعا صغيرا قد سلط على منظومة فجعلها تتحرك في وضع توازن . ولما كانت الطاقة الكلية ثابتة ، فيمكننا كتابة

$$T + V = T_0 + V_0$$

او

$$T - T_0 = -(V - V_0) \qquad (١١\text{–}٣)$$

حيث T_0 هي طاقة المنظومة الحركية عندما تكون في وضع التوازن (كنتيجة للدفع) ، و V_0 هي الطاقة الكامنة في وضع التوازن . الان ، اذا كانت الطاقة الكامنة في نهايتها العظمى في وضع التوازن ، عندئذ $V - V_0$ تكون سالبة ، وبناء على ذلك تكون $T - T_0$ موجبة ، اى ان T تزداد عندما تبتعد المنظومة عن التوازن . وواضح ان هذه الحالة تكون غير مستقرة . وبالعكس ، اذا كانت الطاقة الكامنة في وضع التوازن في نهايتها الصغرى ، عندئذ تكون $V - V_0$ موجبة ، و $T - T_0$ سالبة ، اى ان ، T تتناقص . ولكن لايمكن ان تكون T سالبة ، وهكذا تتناقص T الى

الصفر في وضع حدى قريب من التوازن، طبعا يجب ان تكون T_0 صغيرة جـــــدا ٠
ان التوازن في هذه الحالة يكون مستقرا ٠ فمعيار التوازن المستقر اذ ن هو ان تكـــون الطاقــة الكامنــة في نهايتها الصغرى ٠

لمنظومــة ذات درجة حرية واحدة ، عند نا

$$V = V(q) \tag{١١ـ٤}$$

وفي التوازن

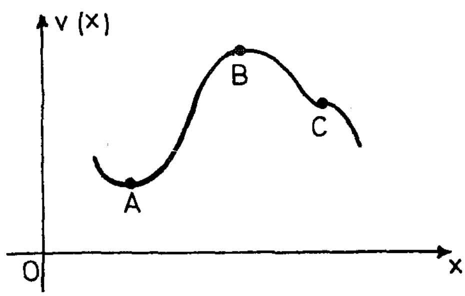
$$\frac{dV}{dq} = 0 \tag{١١ـ٥}$$

عند ئذ يعبر عن الاستقرار كما يلي

$$\frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad (\text{مستقرة}) \tag{١١ـ٦}$$

$$\frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad (\text{غير مستقرة}) \tag{١١ـ٧}$$

اذا كانت $d^2V/dq^2 = 0$ فيجب علينا اختبار المشتقات الاعلى رتبـة ٠ (لقد بحثت هذه في البند التالي) ٠ يمثل الشكل (١١ـ١) مخطط دالـة جهد افتراضية



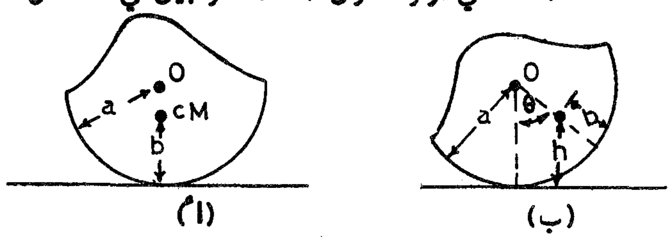
الشـكل (١١ ـ ١)

دالة طاقة الجهد $V(x)$ ٠ تمثل النقطة A توازن مستقر ٠ النقطتان B و C غير مســـتقرتين ٠

تمثل النقطة A موضع توازن مستقر وتمثل النقاط C, B مواضع توازن غير مستقره ٠

مثـال

لنختبر توازن جسم قاعدتـه مدوره (كروية او اسطوانية) التي تتوازن علـى سطـح مستو افقي ٠ لنفرض ان a يمثل نصف قطر تقوس القاعدة ، وان مركـز الكتلـة CM يبعد بمسافة b من نقطة التماس الابتدائية ، كما هو مبين في الشكل ١١ـ٢ (آ) ٠ يبين الشكل ١١ ـ ٢ ب موضع الجسم بعد ازاحتـه ، حيث θ تمثل الزاويـة بيـن العمود والخط OCM (O هي مركز التقوس) ، كما هو مبين في الشـكل ٠



الشكل ١١ـ٢ ٠ الاحداثيات لتحليل التوازن المستقر لجسم قاعدته مستديرة

لنفرض ان h تمثل المسافة بين المستوى ومركز الكتلة ، عندئذ الطاقة الكامنة تعطـي مـن

$$V = mgh = mg\left[a - (a - b)\cos\theta\right]$$

حيث m هي كتلة الجسم ٠ عندئذ

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\,(a - b)\sin\theta$$

اى ان

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \text{عندما} \quad \theta = 0$$

اذن $\theta = 0$ هي موضع توازن ٠ اضف الى ذلك

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\,(a - b)\cos\theta$$

و

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\ (a - b) \quad \text{عندما} \quad \theta = 0$$

اذن يكون التوازن مستقرا عندما $a > b$ ، اي ان ، اذا كان مركز الكتلة يقع تحت مركز التقوس .

(١١ ـ ٢) فك دالة الطاقة الكامنة بمتسلسلة اساسية

Expansion of the Potential-Energy Function in a Power Series.

لنفرض اولا منظومة لها درجة حرية واحدة . وافرض اننا نفك دالة الطاقة الكامنة $V(q)$ كمتسلسلة اساسية حول النقطة $q = a$. عندنا

$$V(q) = k_0 + k_1 (q - a) + \frac{1}{2!} k_2 (q - a)^2 + \dots\dots + \frac{1}{n!} k_n (q - a)^n + \dots\dots$$

حيث

$$k_n = \left(\frac{d^nV}{dq^n} \right)_{q=a}$$

الان ، اذا كانت النقطة $q=a$ هي موضع توازن ، عندئذ $k_1 = (dV/dq)_{q=a} = 0$. هذا يحذف الحد الخطي في المفكوك ، بحيث

$$V(q) = k_0 + \frac{1}{2!} k_2 (q - a)^2 + \dots\dots \qquad (١١ ـ ٨)$$

ويعتمد استقرار التوازن في النقطة $q = a$ على اول حد غير متلاشي بعد الحد الاول k_0 ، في المفكوك السابق . اذا كان اس هذا الحد n زوجيا ، عندئذ يكون التوازن مستقرا ، اذا كانت المشتقة d^nV/dq^n موجبة . واذا كانت المشتقة سالبة او كانت n فردية فالتوازن يكون غير مستقر . لكي نرى لماذا يكون ذلك ، لنفرض ان n

تمثل رتبــة الحد غير المتلاشي الاول • عندئذ لابتعاد صغير من نقطة التوازن عندنــا

$$F = -\frac{\partial V}{\partial q} \simeq -k_n\ (q-a)^{n-1}$$

والان للتوازن المستقر يجب ان يكون اتجاه F نحو a ، اى انها سالبة اذا كانــت $q > a$ وموجبــة اذا كانت $q < a$ • يمكن ان تكون هذه الحالة فقط اذا كانـت k_n موجبـة و n زوجيــة •

في معظم الحالات التي لها اهمية فيزيائية هي عندما تكون $n = 2$ اى ان الطاقــة الكامنــة تكون دالــة من الدرجــة الثانيــة للازاحــة والقــوة دالــة خطيــة •

فاذا نقلنا نقطــة الاصل الى النقطــة $q=a$ واعتباطيا وضعنا $V(0)=0$ عندئـذ يمكننا كتابــة

$$V(q) = \tfrac{1}{2}\, k_2 p^2 \qquad (١١ـ٩)$$

اذا اهملنا القوى الاعلى لـ q •

وبالتماثل ، لحالة منظومــة لها عدة درجات حريــة ، فيمكننا ان نسبب تحويل خطــي بحيث يكون $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ وضعا توازنا • اذا كان يتواجد وضع تــوازن • فدالــة الطاقــة الكامنــة يمكن فكها عندئذ بالصيغة التاليــة

$$V(q_1, q_2, \ldots q_n) = \tfrac{1}{2}(k_{11}q_1^2 + 2k_{12}q_1q_2 + k_{22}q_2^2 + \ldots) \qquad (١١ـ١٠)$$

حيــث

$$k_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1{}^2}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_n=0}$$

$$k_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_n=0}$$

وهلم جرا • وضعنا اعتباطيا $V(0,\ 0,\ \ldots\ 0) = 0$ • لقد اختفت الحــدود الخطية في المفكوك لان الفك كان حول وضع توازن •

التعبير بين القوسين في المعادلة (١١ــ١٠) يسمى بصيغة الدرجة الثانية ٠ فاذا حددت [1] هذه الصيغة بانها موجبة اى اما ان تكون صفراً او موجبة لجميع قيم $q's$ عندئذ وضع التوازن $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ يكون مستقراً ٠

١١ــ٣ تذبذب منظومة ذات درجة حرية واحدة

Oscillations of a System with one Degree of Freedom.

اذا كانت منظومة لها درجة حرية واحدة فيمكن كتابة الطاقة الحركية كما يلي :

$$T = \frac{1}{2}\, \mu\, \dot{q}^2 \qquad (١١ــ١١)$$

هنا قد يكون المعامل μ ثابتا او دالة للاحداثيات المعممة q ٠ على اية حال، يمكننا فك μ كمتسلسلة اساسية في q ونكتب

$$\mu = \mu(0) + \left(\frac{d\mu}{dq}\right)_{q=0} q + \cdots\cdots \qquad (١١ــ١٢)$$

اذا كانت $q=0$ هي موضع توازن، فسوف نفرض q صغيرة بحيث يكون التقريب سارى المفعول ٠

$$\mu = \mu(0) = \text{constant} \qquad (١١ــ١٣)$$

ومن المعادلة (١١ــ٩) نرى ان دالة لاكرانج L يمكن كتابتها كما يلي :

---

(١) الشرطان الضرورى والكافي للصيغة ذات الدرجة الثانية في المعادلة (١١ــ١٠) لكي تكون موجبة هي

$$k_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0$$

وهلم جرا ٠

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}\mu \dot{q}^2 - \tfrac{1}{2} kq^2 \qquad (١١\_١٤)$$

حيث $k = k_2 = (d^2V/dq^2)_{q=0}$ • معادلة لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

عندئذ تعطي

$$\mu\ddot{q} + kq = 0 \qquad (١١\_١٥)$$

اذن اذا كانت $q = 0$ هي موضع توازن مستقر، اى اذا كانت $k > 0$ عندئـــــذ تتذبذب q توافقيا حول موضع التوازن بتردد زاوى

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \qquad (١١\_١٦)$$

و

$$q = q_0 \cos(\omega t + \epsilon) \qquad (١١\_١٧)$$

حيث q_0 تمثل سعة التذبذب ، و ϵ هي زاوية الطور • وتستنتج قيم ثوابت التكامل من الشروط الابتدائية •

مثـــال

افرض حركة الجسم المدور ــ القاعدة الذى بحث في مثال البند السابق (الشـكل (١١ ــ ٢)) • اذا كان التماس تام الخشونة نحصل على حركة دورانية فقط ، ويكـــون انطلاق مركز الكتلة المقرب هو $b\dot{\theta}$ لزاوية صغيرة θ • ووفقا لذلك الطاقة الحركيـــة T تكون كما يلي :

$$T = \tfrac{1}{2} m (b\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2$$

حيث I_{cm} يمثل عـزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة • كذلك ، يمكننا التعبير عـن دالـة الطاقـة الكامنـة V كما يلي

$$V(\theta) = mg\left[a - (a - b)\cos\theta\right]$$
$$= mg\left[a - (a - b)\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right)\right]$$

حدود عليا + ثابت + $= \frac{1}{2} mg (a - b) \theta^2$

عند ئذ يمكننا كتابة

$$L = \frac{1}{2}(mb^2 + I_{cm})\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mg(a - b) \theta^2$$

بعد اهمال الثوابت والحدود العليا ۰ وعند المقارنة مع المعادلتين

(١١ـ١٤) و (١١ـ١٥) نرى ان

$$\mu = mb^2 + I_{cm}$$

$$k = mg(a - b)$$

وعليه فان الحركة حول موضع التوازن $\theta = 0$ تكون تقريبا حركة توافقية بسيطة

ترددها الزاوى

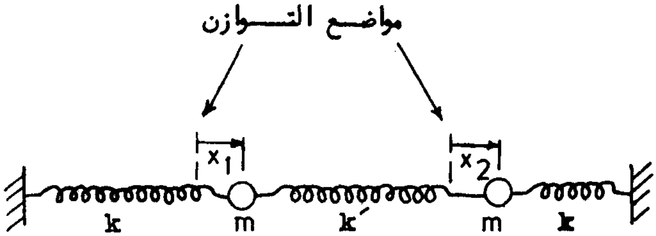
$$\omega = \sqrt{\frac{mg(a - b)}{mb^2 + I_{cm}}} \qquad (١١ـ١٨)$$

١١ـ٤ متذبذبان توافقيان مزدوجان

Two Coupled Harmonic Oscillators

قبل ان نستنبط النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة باى عدد من درجات الحرية ، سوف ندرس مثالاً خاصاً وهو منظومة متكونة من متذبذبين توافقيين مزدوجين معا ۰ يبين الشكل (١١ـ٣) جسيمين كتلة كل منهما m وقد ربط كل جسيم بنابض خفيف صلابته k ۰ وازدوج الجسيمين ايضا معا بنابض ثالث صلابته k' ۰ سنفرض ان الجسيمين مقيدا الحركة على خط مستقيم (الاتجاه x كما هو مبين) ۰

فالمنظومة اذن لها درجتا حرية ، سنختار الاحداثيين x_1 ، x_2 لازاحتي



الشكل ١١ـ ٣ ، نموذج لمتذبذبين توافقيين مزدوجين

الجسيمين من موضعي توازنهما المتتاليين ، ليمثلان وضع المنظومة ٠

الطاقة الحركية للمنظومة هي

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 \qquad (١١ـ١٩)$$

والطاقة الكامنة هي

$$V = \tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (١١ـ٢٠)$$

اذن دالة لاكرانج L هي كالاتي

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (١١ـ٢١)$$

والمعادلات التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

عندئذ تصبح

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \qquad (١١ـ٢٢)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

او

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 - \frac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 + \frac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \qquad (٢٣\_١١)$$

ولو لم يكن نابض الازدواج k' ، لامكن فرز المعادلتين ولتحرك كل جسيم بحرية بحركة توافقية بسيطة ترددها $\sqrt{k/m}$. فمن المناسب اذن تجربة الحل الذي يعتمد فيه كل من x_1 و x_2 على الزمن من خلال العامل $\cos \omega t$ حيث ω يجب ان تستنتج . حلنا التجريبي هو

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \qquad (٢٤\_١١)$$
$$x_2 = A_2 \cos \omega t$$

وبالتعويض المباشر في المعادلة (١١ــ٢٣) نجد ان

$$-\omega^2 A_1 \cos \omega t + \frac{k}{m} A_1 \cos \omega t + \frac{k'}{m}(A_1 - A_2) \cos \omega t = 0 \qquad (٢٥\_١١)$$
$$-\omega^2 A_2 \cos \omega t + \frac{k}{m} A_2 \cos \omega t + \frac{k'}{m}(A_2 - A_1) \cos \omega t = 0$$

وعند حذف العامل المشترك $\cos \omega t$ وتجميع الحدود نحصل على

$$\left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k'}{m} A_2 = 0 \qquad (٢٦\_١١)$$
$$-\frac{k'}{m} A_1 + \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

هذه هي الشروط المفروضة على المعامل A_1 ، A_2 اذا كانت دالتنا التجريبية هي فعلا حل . اذن اما ان تكون $A_1 = A_2 = 0$ والا يجب ان يتلاشى محدد المعامل التالي

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (١١-٢٧)$$

وتسمى هذه بالمعادلة البدائية secular equation

وعند فك المعادلة البدائية المذكورة اعلاه نحصل على

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k'}{m}\right)^2 = 0 \qquad (١١-٢٨)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في ω^2 . والجذران اللذان نمثلهما بالرمزين

ω_a و ω_b هما

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega_b = \left(\frac{k+2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

والترددان ω_a , ω_b يسميان بالترددين العياريين ـ

normal frequencies للمنظومة ٠ عندنا الان حلين ممكنين

(آ)

$$x_1 = A_1 \cos \omega_a t \qquad x_2 = A_2 \cos \omega_a t \qquad (١١-٢٩)$$

و (ب)

$$x_1 = B_1 \cos \omega_b t \qquad x_2 = B_2 \cos \omega_b t \qquad (١١-٣٠)$$

لاحظ ان الجذور السالبة للمعادلة الاولية لاتعطي حلولا مختلفة لان $\cos(-\omega t) = \cos \omega t$ ٠ والسمات A_1, A_2, B_1, B_2 مستقلة ٠ فاذا عوضنا قيم ω في المعادلات (١١-٢٦) نحصل على مايلي

(آ) عندما $\omega = \omega_a$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k}{m}\right)A_1 + \frac{k'}{m} A_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

(١١ــ ٣١)
$$A_1 = A_2$$

(ب) عندما
$$\omega = \omega_b$$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k+2k'}{m}\right)B_1 - \frac{k'}{m} B_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

(١١ــ ٣٢)
$$B_1 = -B_2$$

اذن حلولنا (المعادلات (١١ــ ٢٩)، (١١ــ٣٠) يمكن التعبير عنها كما يلي

(١١ــ ٣٣)
$$x_1 = A \cos \omega_a t \qquad x_2 = A \cos \omega_a t$$

(١١ــ ٣٤)
$$x_1 = B \cos \omega_b t \qquad x_2 = -B \cos \omega_b t$$

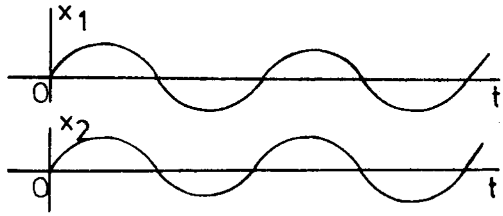
وليس من الضروري الاستمرار في استخدام الحروف السفلية · والتذبذبات الممثلة في الحلول اعلاه تسمى بالصيغ العيارية normal modes · والشرط الذي تتميز به الصيغ العيارية هو ان جميع الاحداثيات تتذبذب بنفس التردد · في حالتنا يكون التذبذب في التردد ω_a بحيث ان

$$x_1 = x_2$$

وهذه تسمى بالصيغة المتناظرة Symmetric mode · ويكون التذبذب في التردد ω_b بحيث ان

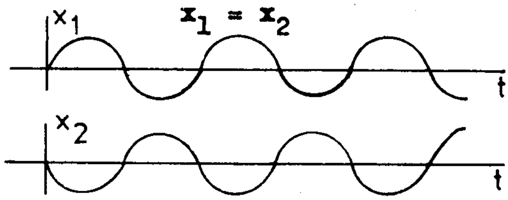
$$x_1 = -x_2$$

وتسمى هذه بالصيغة غير المتناظرة · الشكل ١١ــ ٤ يبين مخططات الصيغتين العياريتين ·



الصيغـة المتناظـرة

$x_1 = x_2$



$x_1 = -x_2$ الصيغـة غير المتناظرة

الشكل (١١ــ ٤) : مخططات ازاحة ــ زمن للصيغ العيارية لمزدوج متذبذب توافقي

The Complete Solution الحل الكامل

لنعود الى الوراء ونفرض المعادلات التفاضلية الاصلية للحركة ، المعادلـة (١١ــ٤٣) . يمكننا بسهولة رؤية ان الحل التجريبي الذى تعتمد فيه x's على الزمن من خلال العامل $\sin \omega t$ بدلا من $\cos \omega t$ سيعطي جوهريا نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقا . اى على نفس الترددات والصيغ العيارية اى ان

$$x_1 = A' \sin \omega_a t \qquad x_2 = A' \sin \omega_a t \tag{١١ــ٣٥}$$

و

$$x_1 = B' \sin \omega_b t \qquad x_2 = -B' \sin \omega_b t \tag{١١ــ٣٦}$$

تكون ايضا حلولا ٠ ولما كانت المعادلات التفاضلية خطية نعلم ان الحلول قد تجمع سويا لتعطي حلولا اخرى٠ لذلك يمكننا كتابة الحل الكامل على النحو التالي

$$x_1 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t + B\cos\omega_b t + B'\sin\omega_b t$$
$$x_2 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t - B\cos\omega_b t - B'\sin\omega_b t \qquad (١١ـ٣٧)$$

وتستنتج السعات من الشروط الابتدائية٠ اذن في الزمن $t = 0$ عندنا

$$x_1(0) = A + B \qquad x_2(0) = A - B$$

كذلك ، عند تفاضلها بالنسبة للزمن t ، نحصل في الزمن $t=0$ على العلاقات التالية

$$\dot{x}_1(0) = A'\omega_a + B'\omega_b$$
$$\dot{x}_2(0) = A'\omega_a - B'\omega_b$$

والآن يمكننا الحل للسعات لنجد

$$A = \tfrac{1}{2}\left[x_1(0) + x_2(0)\right], \quad B = \tfrac{1}{2}\left[x_1(0) - x_2(0)\right]$$
$$A' = \frac{1}{2\omega_a}\left[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\right], \quad B' = \frac{1}{2\omega_b}\left[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\right] \qquad (١١ـ٣٨)$$

هذه المعادلات تسمح لنا بايجاد تهيجات الصيغتين العياريتين من الشروط الابتدائية٠ افرض على سبيل المثال أن الجسمين قد سحبا في البدء من موضعي توازنهما بمقدارين متساويين وفي نفس الاتجاه واطلقا بحيث كانت الشروط الابتدائية على النحو التالي $x_1(0) = x_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

فالنتيجة هي تهييج الصيغة المتناظرة فقط، لان تتلاشى جميع الثوابت ماعدا A ٠ وبالعكس اذا بدأت الحركة بسحب الجسمين بمقدارين متساويين وفي اتجاهين متعاكسين ثم اطلقا ، فعندئذ الشروط الابتدائية تكون $x_1(0)=-x_2(0), \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$

في هذه الحالة جميع الثوابت تساوى صفرا ماعدا B اى ان غير المتناظر فقط يكـــــون متهيجا • وبصورة عامـــة يتكون تذبذب المنظومـــة من مزيج الصيغتين •

(١١ـ٥) الاحداثيات العياريـــة Normal Coordinates

لوصف حركـــة مزدوج متذبذبين توافقيين • نستخدم منظومـــة احداثيات جديـدة هي q_a ، q_b والمعرفة كالاتي

$$q_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$q_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \qquad (١١ـ٣٩)$$

لنعبر عن دالة لاكرانج بدلالة هذه الاحداثيات • عندنا

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_a + q_b)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_a - q_b) \qquad (١١ـ٤٠)$$

اذن

$$T = \frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a+\dot{q}_b)^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a-\dot{q}_b)^2}{2} = \frac{m}{2}\dot{q}_a^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_b^2$$

$$V = \frac{k}{2}\frac{(q_a+q_b)^2}{2} + \frac{k}{2}\frac{(q_a-q_b)^2}{2} + \frac{k'}{2}q_b^2 = \frac{k}{2}q_a^2 + \frac{k''}{2}q_b^2$$

وهكذا دالة لاكرانج تصبح

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}_a^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_b^2 - \frac{k}{2}q_a^2 - \frac{k''}{2}q_b^2 \qquad (١١ـ٤١)$$

حيث

$$k'' = k + 2k'$$

معادلات لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial L}{\partial q_b}$$

تصبح ببساطة

$$m\ddot{q}_a = -kq_a \qquad m\ddot{q}_b = -k'' q_b \qquad (١١ـ ٤٢)$$

فالمعادلات اذن قد فرزت • ويمكن كتابة الحلول بالمعاينة كما يلي :

$$q_a = \mathcal{A} \cos (\omega_a t + \phi_a)$$
$$q_b = \mathcal{B} \cos (\omega_b t + \phi_b) \qquad (١١ـ ٤٣)$$

حيث

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_b = \left(\frac{k''}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k + 2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نرى الان ، لحركة اية منظومة يتذبذب الاحداثي q_a دائما بتردد ω_a ويتذبذب الاحداثي q_b بتردد ω_b • وتسمى الاحداثيات الجديدة q_a و q_b بالاحداثيات العيارية للمنظومة Normal Coordinates .

وفي الحالة العامة ، يكون الاحداثي العيارى تركيبا خطيا للاحداثيات بحيث تختصر الطاقتين الحركية والكامنة الى مجموعات مربعة • عندئذ تفرز معادلات لاكرانج للحركة اتوماتيكيا كالمعادلات (١١ـ ٤٢) • ولذلك يوجد تردد واحد فقط يرافق كل احداثي عيارى • وتتميز الصيغ العيارية لمنظومة متذبذبة بحقيقة كون وجود لكل صيغة عيارية احداثي عيارى مرافق مع تردده العيارى • وعندما تتذبذب المنظومة بصيغة عيارية نقية تتذبذب جميع الجسيمات بتردد واحد وهناك احداثي عيارى واحد فقط لايساوى صفراً •

في حالة مزدوجين متذبذبين ، عندنا

(آ) الصيغة المتناظرة

$$\omega = \omega_a, \quad q_a \text{ نشط}, \quad q_b = 0, \quad x_1 = x_2$$

(ب) الصيغة غير المتناظرة

$$\omega = \omega_b, \quad q_b \text{ نشط}, \quad q_a = 0, \quad x_1 = -x_2$$

الاحداثيات العيارية لاى منظومة لها درجتين من درجات الحرية لاجل ايجاد الاحداثيات العيارية للحالة العامة التي لها درجتان من درجات الحرية، نعود الى المعادلات الشرطية للسعات ، المعادلات (١١ـ ٢٦) . في الحالة العامة ، يمكن كتابة كل معادلة كالنسبة

$$\frac{A_1}{A_2} = c = \frac{x_1}{x_2}$$

حيث c يمثل عددا يمكن ايجاد قيمته اذا كانت الترددات العيارية معلومة .

وبصورة عامة ، تختلف c لكل تردد عيّارى . في مثالنا السابق ، $c = +1$ او $c = -1$. ومن الواضح انه ، اذا استخدمنا احداثيات جديدة معرّفة كالاتي

$$q_a = x_1 - c_1 x_2$$
$$q_b = x_1 - c_2 x_2 \qquad (١١ـ٤٤)$$

حيث c_1 ، c_2 هما قيمتا c ، عندئذ q_a ، q_b يجب ان يكونا احداثيين عياريين . لان هذا او ذاك يكون بالضرورة صفراً اذا كانت المنظومة تتذبذب باحد تردداتها العيارية . وواضح ان اى ثابت مضاعف للكميات المعرّفة بالمعادلات (١١ـ٤٤) يكون ايضا احداثيا عياريا .

مثـــال

لنفرض حركة مايسمى (بالبندول المزدوج) الذى يتكون من وتر خفيف غير قابـــل للتمطط طولـــه 2ℓ وقد ثبت احد طرفيـــه وعلق في الطرف الآخر جسيم كتلتـــه m ، وعلق في مركز الوتـــر جسيم كتلتـــه ايضا m كما في الشكل (١١ـ٥) ، اذا فرضنا ان المنظومـــة تبقى في مستو واحد ، فيمكننا تعيين الوضع بالزاويتين θ و ϕ كما هـــو مبين في الشكل ، لتذبذبات صغيرة حول موضع التوازن، يكون انطلاقا الجسيمين علـــى وجـــه التقريب $\ell\dot\theta$ ، $\ell(\dot\theta+\dot\phi)$ وطاقتاهما الكامنتان $-mg\ell\cos\theta$ $-mg\ell(\cos\theta+\cos\phi)$ ، عندئذ تصبح دالة لاگرانج على النحو التالي ،

$$L = \frac{m}{2}\ell^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\ell^2(\dot\theta+\dot\phi)^2 + 2mg\ell\cos\theta + mg\ell\cos\phi$$

معادلات لاگرانج للحركـــة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = \frac{\partial L}{\partial\phi}$$

عندئذٍ تصبح

$$m\ell^2\ddot\theta + m\ell^2(\ddot\theta + \ddot\phi) = -2mg\ell\sin\theta$$

$$m\ell^2(\ddot\theta+\ddot\phi) = -mg\ell\sin\phi$$

اذا فرضنا ان $\sin\theta \simeq \theta$ و $\sin\phi\simeq\phi$ ،وعند ترتيب الحدود نجد ان

$$2\ddot\theta + \frac{2g}{\ell}\theta + \ddot\phi = 0$$

$$\ddot\theta + \ddot\phi + \frac{g}{\ell}\phi = 0 \qquad (١١ـ٤٥)$$

عندئذ المحدد الاولي للمنظومة يكون علو النحوالتالي

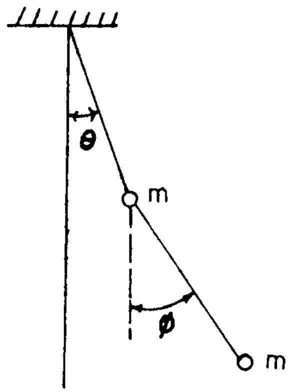
$$\begin{vmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{\ell} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{\ell} \end{vmatrix} = 0$$

او

$$\omega^4 - 4\omega^2 \left(\frac{g}{\ell}\right) + 2\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

اذن الترددان العياريان هما

$$\omega_a = \left[\frac{g}{\ell}\,(2 - \sqrt{2}\,)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega_b = \left[\frac{g}{\ell}\,(2 + \sqrt{2}\,)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (١١ــ ٤٦)$$



الشكل (١١ــ ٥) ٠ البنـــدول المزدوج

اذا كانت المنظومـــة لتذبذب في اى من تردداتها العيارية ، عندئذ اولى معادلات (١١ــ ٤٥) تعطي

$$\left(-2\omega^2 + 2\,\frac{g}{\ell}\right)\theta = \omega^2\phi$$

وعند تعويض قيمتي ω من المعادلات (١١ــ ٤٦) في المعادلة المذكورة اعــلاه ، نحصل على العلاقات التالية بين θ و ϕ للصيغ العيارية

الصيغة المتناظرة $\qquad \phi = +\sqrt{2}\;\theta\,,\quad \omega = \omega_a$

الصيغة غير المتناظر $\qquad \phi = -\sqrt{2}\;\theta\,,\quad \omega = \omega_b$

نستنتج ان الثابت c ، في المعادلات (١١ــ ٤٤) يكون لــه قيمتان ، وهـــي $\pm\sqrt{2}$. اذن الاحداثيات العيارية تصبح

$$q_a = \phi + \sqrt{2}\ \theta$$
$$q_b = \phi - \sqrt{2}\ \theta$$

وقد ترك كتمرين للبرهنة ان دالة لاكرانج تختصر الى مجموعات مربعة عند التعبيـــر عنها بدلالة الاحداثيات العيارية المذكورة اعلاه

(١١ــ ٦) النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة*

General Theory of Vibrating Systems

نعود الان الى منظومة عامة لها n درجة من درجات الحرية ، اثبتنا فـــي الفصل السابق (البند ١٠ــ٣) ان الطاقة الحركية T تكون دالة من الدرجة الثانيـة ومتجانسة للسرع المعممـة ، اى

$$T = \tfrac{1}{2}\mu_{11}\dot{q}_1^2 + \mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\mu_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots$$
$$= \sum_j \sum_k \tfrac{1}{2}\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (١١ــ ٤٧)$$

بشرط ان لاتوجد مقيدات متحركة . ولما كانت الحركة حول وضع التوازن تهمنا ، فســوف نفرض ، كما في البند ١١ــ٣ المعادلة (١١ــ ١٣) ان الـ μ's هـــي ثوابـــت وتساوى قيمها في وضع التوازن . سوف نفرض اكثر من ذلك ، ان التحويل الخطـــي قد استخدم بحيث وضع التوازن يعطى من

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$$

ووفقا لذلك ، الطاقــة الكامنــة V من المعادلة (١١ــ ١٠) هي كالاتي

$$V=\tfrac{1}{2}k_{11}q_1^2 + k_{12}q_1q_2 + \tfrac{1}{2}k_{22}q_2^2+\ldots= \sum_j \sum_k \tfrac{1}{2}k_{jk}q_jq_k \qquad (٤٨ـ١١)$$

عندئذ تاخذ دالة لاكرانج الشكل التالي

$$L = \sum \sum_k \tfrac{1}{2}(\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - k_{jk}q_jq_k) \qquad (٤٩ـ١١)$$

ومعادلات الحركـة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

عندئذ تصبح

$$\sum_j (\mu_{jk}\ddot{q}_j + k_{jk}q_j) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots n) \qquad (٥٠ـ١١)$$

فاذا تواجد حل بالشكل التالي

$$q_k = A_k \cos \omega t \qquad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (٥١ـ١١)$$

عندئذ يجب ان تتحقق المعادلات التالية بالتعويض المباشر

$$\sum_j(-\mu_{jk}\omega^2 + k_{jk})A_j = 0 \quad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (٥٢ـ١١)$$

والحل غير العادى يتطلب تلاشي محدد العوامل A's اى

$$\begin{vmatrix} -\mu_{11}\omega^2 + k_{11} & -\mu_{12}\omega^2 + k_{12} & \cdots \\ -\mu_{21}\omega^2 + k_{21} & -\mu_{22}\omega^2 + k_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (٥٣ـ١١)$$

المعادلة الاولية المذكورة اعلاه هي معادلة من درجة n في ω^2. الجذور التي عددها n هي مربعات الترددات العيارية للمنظومـة ٠

تواجد الاحداثيات العيارية

Existence of Normal Coordinates

لما كانت الطاقة الحركية T لايمكن ان تكون سالبة ، فأى تمثيل ل T بدلالة الاحداثيات المعممة (المعادلة ١١ـ٤٧) يجب ان يكون موجبًا بصورة محددة . وهناك نظرية اساسية في نظرية التحويلات الخطية [٢] نصها : اذا كانت عوامل صيغتي الدرجة الثانية

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k \qquad \sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k$$

تحقق

$$a_{jk} = a_{kj} \qquad b_{jk} = b_{kj}$$

وكانت الاولى موجبة بصورة محددة ، عندئذ يتواجد التحويل الخطي

$$x_k = \sum_j c_{kj} y_j \qquad (k = 1,2,\ldots.n)$$

بحيث تختصر صيغتا الدرجة الثانية الى مجموعات مربعة ، اى

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$$

$$\sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_n y_n^2$$

---

(٢) انظر على سبيل المثال

See, for example, L. P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1953.

تنص النظرية ايضا على ان جذور معادلة المحدد

$$\begin{vmatrix} -\gamma a_{11} + b_{11} & -\gamma a_{12} + b_{12} & \cdots \\ -\gamma a_{21} + b_{21} & -\gamma a_{22} + b_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

هي مطابقة لجذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} -\gamma \alpha_1 + \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma \alpha_2 + \beta_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

عند تطبيق النظرية على الحالة التي نحن بصددها اى المنظومة المتذبذبة .

نرى ان هناك مجموعة احداثيات $\bar{q}_1$ ، $\bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$ والتي تعطى بالتحويل الخطي .

$$q_k = \sum_j c_{kj}\bar{q}_j \qquad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (١١\_٥٤)$$

بحيث ان T و V تختصر الى المجموعات المربعة التالية

$$T = \tfrac{1}{2}(\bar{\mu}_1\dot{\bar{q}}_1^2 + \bar{\mu}_2\dot{\bar{q}}_2^2 + \ldots + \bar{\mu}_n\dot{\bar{q}}_n^2) \qquad (١١\_٥٥)$$

$$V = \tfrac{1}{2}(\bar{k}_1\bar{q}_1^2 + \bar{k}_2\bar{q}_2^2 + \ldots + \bar{k}_n\bar{q}_n^2) \qquad (١١\_٥٦)$$

عندئذ تعطى دالة لاكرانج المتحولة ببساطة على النحو التالي

$$L = \sum_k \tfrac{1}{2}(\bar{\mu}_k\dot{\bar{q}}_k^2 - \bar{k}_k\bar{q}_k^2) \qquad (١١\_٥٧)$$

ومعادلات الحركة التفاضلية المقابلة لها هي

$$\bar{\mu}_k\ddot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k\bar{q}_k = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots.n) \qquad (١١\_٥٨)$$

فالحلول هـي

$$\bar{q}_k = \bar{A}_k \cos(\omega_k t + \epsilon_k) \qquad (١١-٥٩)$$

حيث

$$\omega_k = (\bar{k}_k/\bar{\mu}_k)^{\frac{1}{2}}$$

اذن الكميات q_k هي الاحداثيات العيارية والترددات العيارية المرافقة لهـا هي ω_k . ووفقا للنظرية العامة التي اوردناها تواً ، تعطى الترددات العيارية من المحدد الاولي ، المعادلة (١١-٥٣) . يمكن كتابة هذا المحدد بدون معرفة الاحداثيات العيارية .

ان مسألة ايجاد تحويل الاحداثيات العيارية المعادلة (١١-٥٤) ، للمنظومة العامة تقتضي تحويل المصفوف الى قطري . لقد استنبطنا مايكافيء هذا في معالجـة منظومـة الجسيمين في البند السابق .

حركة منظومة عامة عند تواجد قوى تضاؤل وقوى دافعة خارجية ، ـ في شرحنا السابق لتذبذب منظومـة عامـة ، اهملنا وجود اى قوى احتكاكيـة . فاذا تعرضت المنظومـة الى قوى تضاؤل لزجـة تتناسب مع سرع من الدرجة الاولى للجسيمات فيمكننا كتابـة معادلات لاكرانج على النحو التالي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q'_k \qquad (١١-٦٠)$$

حيث قوة التضاؤل المعممة Q'_k تعطى من

$$Q'_k = -c_{1k}\dot{q}_1 - c_{2k}\dot{q}_2 - \cdots - c_{nk}\dot{q}_n \qquad (١١-٦١)$$

معادلات الحركة التفاضلية الناتجة تماثل الحالة غير المتضائلة [المعادلات (١١-٥٠)] . ماعدا تواجد الحدود التي تحتوي على $\dot{q}$'s . في الغالب (ولكن ليس دائمـا)

يمكن في هذه الحالة ايجاد تحويل احداثي عيارى بحيث تكون المعادلات التفاضلية الناتجة على النحو التالي

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = 0 \qquad (١١\text{ـ}٦٢)$$

حيث

$$\bar{q}_k = \bar{A}ke^{-\lambda_k t} \cos(\omega_k t + \epsilon_k) \qquad (١١\text{ـ}٦٣)$$

اذن تتضاءل سعات الصيغ العيارية اسيا مع الزمن • هناك ايضا امكانية حدوث حالة لا تذبذبية مشابهة للتضائل الحرج او فوق المتضائل لحالة البعد الواحد •

اخيرا لحركة المنظومة التي تخضع بالاضافة الى قوى معيدة خطية وقوى تشتت لقوى دافعة خارجية تتغير توافقيا مع الزمن يمكننا التعبير عنها تحليليا بادخال حدود من النوع $Q_{kext} \cos \omega t$ (او $Q_{kext}e^{i\omega t}$) في كل معادلة حركة ، المعادلة (١١ـ٦٠) • تأخذ معادلات الحركة الناتجة في الاحداثيات المعممة الصيغة التالية

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = Q_k e^{i\omega t} \qquad (١١\text{ـ}٦٤)$$

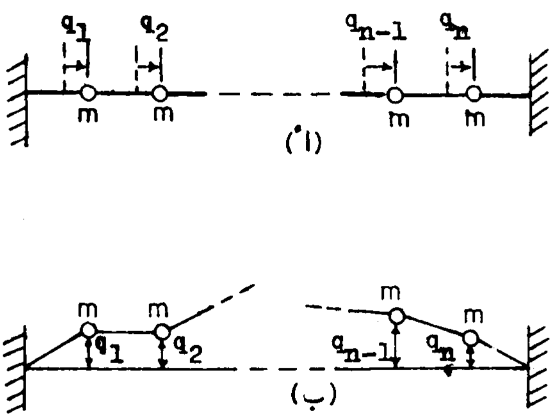
وعلى سبيل المثال ، اذا خضعت المنظومة لقوة دافعة منفردة تتغير توافقيا بتردد يساوى احد الترددات العيارية للمنظومة • عندئذ الصيغة العيارية التي تقابلها تاخذ اكبر سعة في شرط الحالة ــ المستقرة • وفي الحقيقة ، اذا كانت ، ثوابت التضاؤل متناهية في الصغر ، فعندئذ الصيغة العيارية التي ترددها يساوى التردد الدافع تكون هي الوحيدة المتهيجة .

١١ــ ٧) تذبذب وتر محمل Vibration of a Loaded String

نأخذ في هذا البند بنظر الاعتبار حركة منظومة ميكانيكية بسيطة تتكون من وتر مرن خفيف مشدود الطرفين وقد علق فيه عدد معين n من الجسيمات بمسافات متساوية على طوله وكتلة كل منها يساوي m . المسألة توضح النظرية العامة للتذبذب وتقودنا ايضا بصورة طبيعية الى نظرية الحركة الموجية التي ستعالج باختصار في البند القادم .

لنرمز لازاحات مختلف الجسيمات من مواضع توازنها بالاحداثيات q_1 ، q_2 ، ... ، q_n . وفي الحقيقة ، قد يحدث نوعين من الازاحات ، ازاحة طولية يتحرك فيها الجسيم على طول الوتر وازاحة مستعرضة التي يتحرك فيها الجسيم عموديا على طول الوتر . كما هو موضح في الشكل (١١ــ ٦) . وللسهولة سنفرض الحركة اما ان تكون طولية نقية او مستعرضة نقية ، ولو في الحالة الفيزيائية الحقيقية قد يحدث مزيج من النوعين عندئذ الطاقة الحركية تعطى من

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2\right) \qquad (١١ــ ٦٥)$$



الشكل (١١ــ ٦) ترتيب خطي للجسيمات او الوتر المحمل (آ) حركة طولية (ب) حركة مستعرضة

اذا استعملنا الحرف ν ليرمز الى اى جسيم ، عندئذ في حالة الحركة الطولية ، جزء الوتر المشدود بين الجسيمين ν و $\nu + 1$ هو

$$q_{\nu+1} - q_{\nu}$$

اذن الطاقة الكامنة لهذا الجزء من الوتر هي

$$\tfrac{1}{2}K(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

حيث K يمثل معامل مرونة مقطع الوتر الذى يربط الجسيمين المتجاورين

لحالة الحركة المستعرضة ، المسافة بين الجسيم ν و $\nu + 1$ هي

$$\left[h^2 + (q_{\nu+1} - q_{\nu})^2\right]^{\frac{1}{2}} = h + \frac{1}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2 + \ldots$$

حيث h هي مسافة التوازن بين جسيمين متجاورين . عندئذ تمطط جزء الوتر الذى يربط الجسيمين تقريبا هو

$$\Delta \ell = \frac{1}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

اذن ، اذا كان S يمثل الشد في الوتر ، فالطاقة الكامنة للجزء الذى اخذ بنظر الاعتبار هو

$$S\,\Delta \ell = \frac{S}{2h}(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2$$

نستنتج من ذلك ان الطاقة الكامنة الكلية للمنظومة اما ان تكون من النوع الطولي او المستعرض للحركة ويعبر عنها كدالة من الدرجة الثانية على النحو التالي

$$V = \frac{k}{2}\left[q_1^2 + (q_2-q_1)^2 + \ldots + (q_n-q_{n-1})^2 + q_n^2\right] \qquad (١١ - ٦٦)$$

وفيها

$$k = \frac{S}{h} \qquad \text{(الحركة المستعرضة)}$$

او

$$k = K \qquad \text{(الحركة الطولية)}$$

اذن دالة لاكرانج للوتر المحمل تكون على النحو التالي

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left[m\dot{q}_{\nu}^{2} - k(q_{\nu+1} - q_{\nu})^{2} \right] \qquad (٦٧ - ١١)$$

ومعادلات لاكرانج للحركـة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\nu}}$$

عندئذ تصبح

$$m\ddot{q}_{\nu} = -k(q_{\nu} - q_{\nu-1}) + k(q_{\nu+1} - q_{\nu}) \qquad (٦٨ - ١١)$$

حيث $\nu = 1, 2, \ldots\ldots n$

لحل المنظومـة السابقة المتكونـة من n من المعادلات ، نستعمل الحـــل التجريبي الذى تفرض فيــه $q's$ تتغير توافقياً مع الزمن. ومن المناسب اســتعمال الصيغة الاسية التالية

$$q_{\nu} = a_{\nu} e^{i\omega t} \qquad (٦٩ - ١١)$$

حيث a_{ν} يمثل سعة التذبذب للجسيم νth . وعند تعويض الحل التجريبـــي السابق في المعادلات التفاضلية (١١ـ ٦٨) تنتج العلاقــة التالية للسعات

$$-m\omega^{2} a_{\nu} = k(a_{\nu-1} - 2a_{\nu} + a_{\nu+1}) \qquad (٧٠ - ١١)$$

هذه العلاقة ستحتوى على نقطتي طرفي الوتر اذا وضعنا

$$a_{o} = a_{n+1} = 0 \qquad (٧١ - ١١)$$

اذن المحدد الاولي يكون

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 & \cdots & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k & \cdots & 0 \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \qquad (١١\_٧٢)$$

والمحدد هو من المرتبـة nth فهناك اذن n قيم لـ ω التي تستوفي المعادلة. ولكن ، بدلاً من ايجاد n هذه من الجذور بطريقة جبرية ، نجد ان بامكاننا ايجادها باستخدام المعادلة (١١ــ٧٠) المباشر.

هنا ، نعرّف كمية ϕ المنسوبة للسعات a_ν بالمعادلة التالية

$$a_\nu = A \sin(\nu\phi) \qquad (١١\_٧٣)$$

وبالتعويض المباشر في العلاقـة (١١ــ٧٠) عندئذ نحصل على

$$-m\omega^2 A \sin(\nu\phi) = kA\left[\sin(\nu\phi - \phi) - 2\sin(\nu\phi) + \sin(\nu\phi + \phi)\right] \qquad (١١\_٧٤)$$

والتي تختصر بسهولة الى

$$m\omega^2 = k(2 - 2\cos\phi) = 4k\sin^2\frac{\phi}{2} \qquad (١١\_٧٥)$$

او

$$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\phi}{2} \qquad (١١\_٧٦)$$

حيـث

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (١١\_٧٧)$$

تعطي المعادلة (١١ـ ٧٦) الترددات العيارية بدلالة الكمية ϕ التــي لــم نستنتجها حتى الان . وفي الحقيقــة سنحصل على نفس العلاقــة التي حصلنا عليهــا لاى من التعويضات التالية $A\cos\nu\phi$, $Ae^{i\nu\phi}$, $Ae^{-i\nu\phi}$ للسعــة a_ν ، او اى تركيب خطي منها . على اية حال ، فقط التعويض $a_\nu = A\sin(\nu\phi)$ يستوفــي شرط النهاية $a_0 = 0$. ولاجل حساب القيمة الحقيقية للبرمتر ϕ ، وذلــك لايجاد الترددات العيارية للوتر المتذبذب ، نستعمل شرط النهاية الاخــــر اى $a_{n+1} = 0$. وسيستوفي هذا الشرط اذا وضعنا

$$(n + 1)\phi = N\pi \qquad (١١ـ ٧٨)$$

حيث N يمثل عدداً صحيحاً ، اذ نحصل عندئذ على

$$a_{n+1} = A\sin(N\pi) = 0$$

وبايجاد ϕ يمكننا الان حساب الترددات العيارية ، التي تعطى من

$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2n + 2}\right) \qquad (١١ـ ٧٩)$$

وبالاضافة الى ذلك ، نرى من المعادلات (١١ـ ٧٣) و (١١ـ ٧٨) ان السعات للصيغ العيارية تعطى من

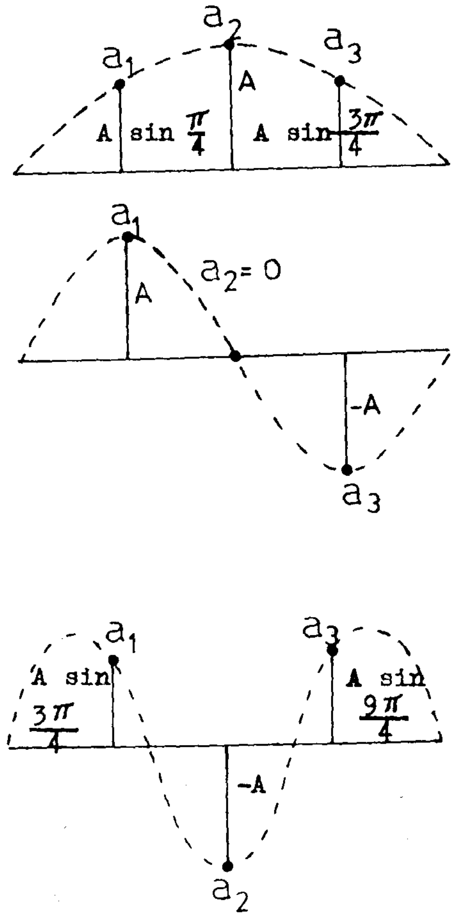
$$a_\nu = A\sin\left(\frac{N\pi\nu}{n + 1}\right) \qquad (١١ـ٨٠)$$

هنا القيم $\nu = 1,2,\ldots n$ تمثل جسيما خاصا في ترتيب خطــي والقيـــم $N = 1,2,\ldots\ldots n$ تشير الى الصيغة العيارية التي تتذبذب بها المنظومــة .

لقد وضحت الصيغ العيارية المختلفة بيانيا وذلك برسم السعات كما اعطيت مــن المعادلة (١١ـ ٨٠) . وهذه تقع على منحن جيب كما هو موضح في الشكل (١١ـ ٧)

والذى يبين حالة ثلاث جسيمات $n = 3$ · تعطي الحركـة الحقيقيـة للمنظومـة ، عندما تتذبذب بصيغة واحدة نقيـة من المعادلة

$$q_\nu = a_\nu \cos(\omega_N t) = A \sin\left(\frac{\pi N \nu}{n+1}\right) \cos(\omega_N t) \qquad (١١ـ٨١)$$



الصيغة الاولى

$N = 1$

$a_\nu = A \sin\left(\frac{\nu\pi}{4}\right)$

الصيغة الثانية

$N = 2$

$a_\nu = A \sin\left(\frac{2\pi\nu}{4}\right)$

الصيغة الثالثة

$N = 3$

$a_\nu = A \sin\left(\frac{3\nu\pi}{4}\right)$

الشكل ١١ـ٧   الصيغ العيارية لمنظومة متكونة من ثلاثة جسيمات

النوع العام للحركة هو تركيب خطي لجميع الصيغ العيارية · ويمكن التعبير عن هـــذا كما يلي

$$q_{\nu} = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right) \cos\left(\omega_N t + \phi_N\right) \qquad (١١ـ ٨٢)$$

حيث القيم A_N و ϕ_N تحسب من الشروط الابتدائية ·

في الحالة التي يكون فيها عدد الجسيمات n كبيرا بالمقارنة مع عدد الصيغـة N ، بحيث تكون النسبة $N\pi/(2n+2)$ صغيرة ، يمكننا استبدال حـد الجيب في المعادلة (١١ـ ٧٩) بالازاحة الزاوية · اذن يكون عندنا تقريبا

$$\omega_N \approx N\left(\frac{\pi\omega_0}{n+1}\right) \qquad (١١ـ ٨٣)$$

وهذا يعني ان الترددات العيارية تكون تقريباً مضاعفات صحيحة لاوطـأ تـــردد $\pi\omega_0/(n+1)$ · وبعبارة اخرى ، يمكننا اعتبار الترددات العيارية المختلفـة ، اساسية ، التوافقي الثاني ، التوافقي الثالث ، وهلم جرا · وتتحسن دقـة هـــذه العلاقـة التوافقيـة التكاملية كلما كبر عدد الجسيمات ·

١١ـ ٨ تذبذب منظومـة مستمرة · معادلة الموجـة

Vibration of a Continuous System. The Wave Equation.

لنفرض الحركة لصف من الجسيمات المربوطة والمرتبة بصورة خطية وكان عدد الجسـيمات غير محدود في الكبر والمسافة بين كل جسيمين متجاورين متناهية فـي الصغـــر · وبعبارة اخرى ، عندنا وتر مستمر ثقيل او قضيب · لتحليل منظومـة من هذا النـــوع ، من الملائم اعادة كتابة المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومـة محدودة ، المعادلـــة (١١ـ ٦٨) ، على النحو التالي

$$m\ddot{q} = kh \left[\left(\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h}\right) - \left(\frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h}\right) \right] \qquad (١١\_٨٤)$$

حيث h تمثل المسافة بين موضعي التوازن لاى جسيمين متجاورين · والان ، اذا كان المتغير x يمثل المسافات بصورة عامة في الاتجاه الطولي ، وكان عدد الجسيمات n كبير جدا بحيث تكون h صغيرة بالمقارنـة مع الطول الكلى ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=\nu h + h/2}$$

$$\frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=\nu h - h/2}$$

ووفقاً لذلك ، يساوى الفرق بين التعبيرين السابقين المشتقة الثانية مضروبة في h ، اى

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} - \frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx h \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)_{x=\nu h} \qquad (١١\_٨٥)$$

اذ ن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (١١\_٨٦)$$

او

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (١١\_٨٧)$$

حيث استعملنا الاختصار

$$v^2 = \frac{kh^2}{m} \qquad (١١\_٨٨)$$

المعادلة (١١ــ ٨٧) من المعادلات التفاضلية المشهورة في الفيزياء النظريــــــة · وتسمى بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد · وهي تصادف في مواضع كثيرة مختلفــــة · تمثل حلول معادلة الموجة نوعا من الاضطراب المتنقل · ومن السهل التحقق من ان حل النوع العام لمعادلة الموجة هو كما يلي

$$q = f(x + vt) \qquad (١١ـ ٨٩)$$

او

$$q = f(x - vt) \qquad (١١ـ٩٠)$$

حيث f تمثل اية دالة قابلة للتفاضل ازاحتها الزاوية $x \pm vt$ • يمثل الحــل الاول اضطراباً ينتشر باتجاه x السالب بانطلاق v ، وتمثل المعادلة الثانيـــة اضطراباً يتحرك بانطلاق v باتجاه x الموجب •

وفي مسألتنا الخاصة ، الاضطراب q هو ازاحة جزء صغير للمنظومة من وضع توازنها • الشكل (١١ـ ٨) • قد تكون هذه الازاحـة للوتر ضربة تتحرك على طوله وقـد

الشكل ١١ـ ٨ موجـة منتشـرة

تكون منطقة تضاغط او تخلخل لقضيب صلد تتحرك على طولـــــه •

حساب انطلاق الموجــة

رأينا في البند السابق ان الثابت k ، لحركة الوتر المحمل المستعرضـــة ، يساوى النسبة S/h حيث S يمثل الشد في الوتر • وقد تصبح طبعا هذه النسبة للوتر المستمر مالا نهاية عندما تقترب h من الصفر • ولكن اذا ادخلنا الكثافة الخطية او كتلة وحدة الطول ρ ، يكون عندنا

$$\rho = \frac{m}{h} \qquad (١١ ـ ٩١)$$

ووفقا لذلك ، يمكن كتابة علاقة v^2 ، المعادلة (١١ ـ ٨٨) ، على النحو التالي

$$v^2 = \frac{(S/h)\ h^2}{\rho\, h} = \frac{S}{\rho} \qquad (١١ ـ ٩٢)$$

حيث تختصر h ، عندئذ يكون انطلاق وانتشار الموجات المستعرضة كما يلي

$$v = \left(\frac{S}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (١١ ـ ٩٣)$$

وفي حالة التذبذبات الطولية ، ندخل معامل المرونة Y الذى يعرف بالنسبة بين القوة والاستطالة لوحدة الطول ، اذن k ، صلابة مقطع صغير طوله h ويعطى من

$$k = \frac{Y}{h} \qquad (١١ ـ ٩٤)$$

ووفقا لذلك ، يمكن كتابة المعادلة (١١ ـ ٨٨) على النحو التالي

$$v^2 = \left(\frac{Y/h)h^2}{\rho\, h}\right) = \frac{Y}{\rho} \qquad (١١ ـ ٩٥)$$

مرة اخرى نرى ان h تختصر . اذن انطلاق انتشار الموجات الطولية في قضيب مرن هو

$$v = \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (١١ـ٩٦)$$

١١ـ ٩ موجات منحن الجيب Sinusoidal Waves

في دراسة الحركة الموجية ، الحلول الخاصة لمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

حيث q تمثل دالة جيبيه في x , t اى

$$q = A \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] \qquad (١١ـ٩٧)$$

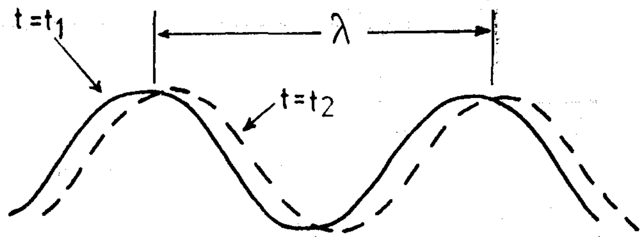
$$q = A \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad (١١ـ٩٨)$$

ذات اهمية اساسية . تمثل هذه الحلول اضطرابات منتشرة تتغير فيها الازاحة في نقطة معينة x توافقيا مع الزمن . سعة هذه الحركة هو الثابت A ، والتردد f هو كما يلي

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \qquad (١١ـ٩٩)$$

علاوة على ذلك ، لقيمة معينة للزمن t ، مثل $t = 0$ ، تتغير الازاحة جيبيا مع المسافة x . المسافة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى او الصغرى هي

الثابت λ ، وتسمى طول الموجة . وتنتشر الامواج الممثلة بالمعادلة (١١ــ ٩٧) باتجاه x السالب وتنتهي تلك التي تمثل بالمعادلة (١١ــ ٩٨) باتجاه x الموجب ، كما هو مبين في الشكل (١١ــ ٩) . وهي حالات خاصة للحل من النوع العام الممثل بالمعادلات (١١ــ ٨٩) و (١١ــ ٩٠) .



الشكل (١١ــ ٩) موجة جيبية

الموجات المستقرة Standing Waves

لما كانت معادلة الموجة ، المعادلة (١١ــ ٨٧) خطية ، يمكننا تكوين اى عدد من الحلول بعمل تراكيب خطية من الحلول المعروفة . احدى التراكيب الخطية الممكنة ذات الاهمية الخاصة هي التي نحصل عليها من جمع موجتين سعتاهما متساويتان وتنتشران في اتجاهين متعاكسين . في رموزنا حل كهذا يعطي من

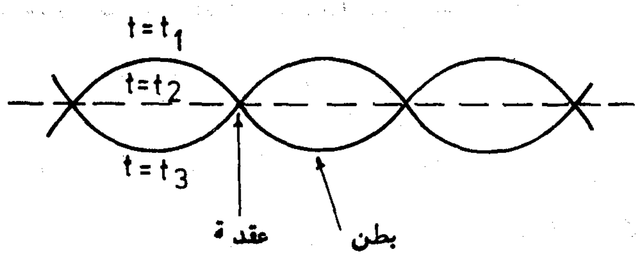
$$q = \tfrac{1}{2} A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right] + \tfrac{1}{2}A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية المناسبة وتجميع الحدود نجد ان المعادلة تختصر الى

$$q = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos(\omega t) \qquad (١١ــ١٠٠)$$

حيث تعطى ω من المعادلة (١١ــ ٩٩) . وتمثل المعادلة السابقة ما يسمى بالموجات المستقرة . هنا نرى ان سعة الازاحة لاتبقى ثابتة وانما تتغير مع قيمة x .

اذ ن عندما تكون... $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2,$ تكون الازاحة دائما صفرا اذ يتلاشى حد الجيب في هذه النقاط . وتسمى النقاط التي ازاحتها صفر بالعقد nodes . وبالعكس ، لقيم x التي تكون فيها قيمة حد الجيب المطلقة تساوى واحدا ، اى.. $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4,..$ تكون سعة التذبذب التوافقي العظمى هي A . وتسمى هذه النقاط بالبطون Antinode والمسافة بين اى عقدتين متتاليتين او بطنين متتاليين تساوى تماما نصف طول الموجة . لقد بينت الحقائق السابقة في الشكل (١١ــ١٠) .



الشكل (١١ــ١٠) الموجات المستقرة

تفسير حركة الوتر المحمل بدلالة الموجات المستقرة

اذا قارنا معادلة الموجة المستقرة ، المعادلة (١١ــ١٠٠) مع حلنا السابق لحركة الوتر المحمل ، المعادلة (١١ــ ٨٢) نلاحظ ان التعبيرين متماثلان . يمكن اظهار التماثل اكثر بملاحظة ان حل الموجة المستقرة سيستوفي شروط الحدود لمسألتنا الاصلية ، اى ان

$$q = 0 : \quad x = 0 \,, \quad x = \ell$$

شريطة ان تكون نقاط نهايات الوتر عقد الموجة المستقرة . ونصادف هذا الشرط اذا كان طول الوتر ℓ هو عدد صحيح N لانصاف اطوال الموجة ، اى ان

$$\ell = (n + 1)\ h = N \frac{\lambda}{2} \qquad (١٠١\_١١)$$

عند حلها لـ λ والتعويض في المعادلة (١١ــ١٠٠) نحصل على

$$q = A \sin \left[\frac{\pi N x}{(n+1)h}\right] \cos (\omega t) \qquad (١٠٢\_١١)$$

وهذا يتفق مع حلنا السابق ، المعادلة (١١ــ ٨٢) ، اذ في مواضع الجسيمات المختلفة عندنا

$$x_\nu = \nu h \qquad (\nu = 1, 2, \ldots . n)$$

اذن يمكن اعتبار تذبذب الوتر المحمل كموجة مستقرة ، وكل صيغة عيارية تحتوي على عدد صحيح معين من العقد في نمط الموجة المستقرة .

تمارين

١١ــ ١ . يتحرك جسيم في الجهد ذى البعد الواحد التالي

$$V(x) = k(3x^4 - 2bx^3 - 3b^2x^2)$$

حيث k ,b ثوابت موجبة . جد مواضع التوازن واحسب استقرارها .

١١ــ ٢ . يتحرك جسيم في الجهد ذى البعدين التالي

$$V(x,y) = k(x^2 + y^2 - 4bx - 6by)$$

احسب موضع التوازن والاستقرار .

١١ــ٣ . شريطان خفيفان من المطاط ، طول كل منهما الطبيعي (غير المطط) هو ℓ وصلابته k ، ثبتت نهايتاهما العليتان بعيدا بعضهما من بعض بمسافة 2ℓ وعلى نفس المستوى . وربطت نهايتاهما السفليتان معا ليحملان جسيما كتلته m .

جد الطاقة الكامنة للمنظومة بدلالة الانخفاض العمودي y للجسيم عن الخط الواصل بين الطرفين العلويين .

١١ــ ٤ . برهن ان موضع التوازن في التمرين السابق يعطى من اكبر جذر موجب للمعادلة التالية

$$u^4 - 2bu^3 + b^2u^2 - 2bu + b^2 = 0$$

حيث $b = mg/(2k\ell)$, $u = y/\ell$. جد القيمة الحقيقية للحالة $b = 2$.

١١ــ ٥ . مكعب منتظم كتلته m وطول ضلعه $2a$ ، توازن على كرة خشنة نصف قطرها b . اثبت ان دالة جهد الطاقة يمكن التعبير عنها كما يلي .

$$V = mg\left[(a + b)\cos\theta + b\theta\sin\theta\right]$$

حيث θ هي الزاوية بين خط التلامس والعمود من مركز الكرة . من هذا ، اثبت ما اذا كان التوازن مستقرا او غير مستقر معتمدا على كون a اقل او اكبر من b على التتالي .

١١ــ ٦ . استقصي الاستقرار للحالة السابقة عندما تكون $a = b$.

١١ــ ٧ . نصف كرة متجانسة نصف قطرها a تستند على قمة نصف كرة خشنة نصف قطرها b ، بحيث كان السطحان المنحنيان متلامسين . اثبت ان التوازن مستقر اذا كانت a اصغر من $3b/5$.

١١ــ ٨ . يتحرك جسيم كتلته m على خط مستقيم ، كالمحور ــ x ، الطاقة الكامنة تعطى من

$$V(x) = -kxe^{-ax}$$

حيث a, k هما ثابتان . جد موضع التوازن وزمن ذبذبات صغيرة للجسيم حول موضع التوازن .

١١ـ ٩ • يتحرك جسيم كتلته m في جهد التمرين ١١ـ١• جد زمن ذبذبات صغيرة حول مواضع استقرار التوازن •

١١ـ١٠ • احسب التردد لذبذبات شاقولية حول موضع التوازن للجسيم في التمرين ١١ـ ٤ •

١١ـ ١١• احسب ذبذبة المكعب في التمرين ١١ـ ٥ •

١١ـ ١٢• احسب زمن ذبذبة نصف الكرة المتذبذبة في التمرين ١١ ـ ٧ •

١١ـ ١٣• كرة حديدية صغيرة تتدحرج الى الامام والخلف حول موضع توازنها داخل تجويف كروى خشن• جد زمن الذبذبة •

١١ـ ١٤• قضيب منتظم AB طوله ℓ وكتلته m ثبت طرفه السفلي A بمفصل• وثبت الطرف العلوى B بوتر مرن طوله الطبيعي $\ell/2$ • وثبت الطرف الآخر للوتر في نقطة C التي تقع مباشرة فوق القضيب بحيث تكون المسافة AC مساوية الى 2ℓ . جد الصلابة k المتطلبة للوتر بحيث يكون الموضع الشاقولي للقضيب هو احد التوازن المستقر• جد كذلك ازمان ذبذبات صغيرة للقضيب حول الموضع •

١١ـ١٥• اكتب الحل الكامل لمتذبذب توافقي مزدوج ، المعادلة (١١ـ٣٧) ، للشروط الابتدائية التالية

$$t = 0 \quad x_1 = A_0 \quad x_2 = 0 \quad \dot{x}_1 = V_0 \quad \dot{x}_2 = 0$$

١١ـ ١٦• جد الحل الكامل للبندول المزدوج الشكل ١١ـ٥ ، للشرط الابتدائي التالي

$$t = 0 \ , \ \theta = A \ , \ \phi = 0 \ , \ \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$$

عبرعن هذه الحركة بدلالة الاحداثيات العيارية •

١١ ــ ١٧ ⋅ احسب الترددات العيارية للتذبذب التوافقي المزدوج في الشــــكل ١١ ــ ٣ للحالة التي يكون فيها كتلتا الجسيمين غير متساويتين ، m_1 , m_2 وبصورة خاصة جد الترددات لحالــة

$$m_1 = m$$

$$m_2 = 2m$$

$$k' = \frac{k}{2}$$

عبر عن النتيجة بدلالة الكمية

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

١١ ــ ١٨ ⋅ جد الاحداثيات العيارية للتمرين المذكور اعلاه ⋅

تحقق من ان دالــة لاكرانج تختصر الى مجموعات مربعة لهذه الاحداثيــــــــات ⋅

١١ ــ ١٩ ⋅ جد الترددات العياريــة للبندول المزدوج في الشــكل (١١ ــ ٥) للحالة التي يكون فيها طول الوتر العلوى l_1 والطول السفلي l_2 ⋅

١١ ــ ٢٠ ⋅ نابض مرن خفيف صلابتــه k ثبت طرفــه العلوى وعلق جسيم كتلته m في الطرف السفلي ⋅ ثم ثبت نابض ثاني صلابتــه k في الجسيم وهو بدوره يحمــــل جسيما كتلتــه $2m$ في طرفــه السفلي ⋅ جد الترددات العيارية للمنظومــة للتذبذبات الشاقولية حول وضع التوازن ⋅ جد ايضا احداثيات العياريــة ⋅

١١ ــ ٢١ ⋅ نابض مرن ثقيل صلابتــه وكثافتــه منتظمتان يحمل جسيما كتلتــه m ⋅ اذا كانت m' كتلــة النابض و k صلابتــه ، اثبت ان زمن الذبذبة لذبذبــات الجسيم الشاقولية هــو

$$2\pi \sqrt{\frac{m + (m'/3)}{k}}$$

يبين هذا التمرين تاثير كتلة النابض على زمن الذبذبة .

١١ـ ٢٢ . جد الاحداثيات العيارية في التمرين ١١ـ ١٩ للحالة الخاصة

$$l_1 = 2l \quad , \quad l_2 = l$$

١١ـ ٢٣ . قضيب كتلته m وطوله a ربط احد طرفيه بنابض طوله b وقد ثبت طرف النابض الثاني . جد الترددات العيارية لتذبذب المنظومة حول وضع التوازن العمودي . افرض ان الحركة في مستوى شاقولي واحد .

١١ـ ٢٤ . جد الاحداثيات العيارية للتمرين السابق عندما تكون $a = b$.

١١ـ ٢٥ . ضع المعادلة الاولية لحالة ثلاثة جسيمات مزدوجة مرتبة بصورة خطية واثبت ان الترددات العيارية هي نفسها التي تعطيها المعادلة (١١ـ ٨٠) .

١١ـ ٢٦ . بندولان بسيطان متماثلان ازدوجا معا بقوة تجاذب ضعيفة جدا تتغير مع مربع للمسافة العكسية بين الجسيمين . اثبت لازاحات صغيرة عن وضع التوازن يمكن اختصار دالة لاكرانج الى نفس صيغتها لتذبذبين توافقيين مزدوجين . اثبت ايضا انه اذا بدأ إحد البندولين متذبذبا وكان الآخر ساكنا ، عندئذ سيتحرك البندول الثاني ويكون الاول ساكنا وهكذا .

١١ـ ٢٧ . جزيئة ثلاثية خطية (مثل CO_2) تتكون من ذرة مركزية كتلتها m وذرتان اخريان كتلة كل منهما m' . والذرات الثلاث تقع على خط مستقيم . ضع دالة لاكرانج لهذه الجزيئة على فرض ان الحركة تحدث في خط مستقيم

(المحور ــ x) وجد الصيغ العيارية والترددات العيارية ٠ افرض ان القوة بين كل ذرتيل متجاورتين يمكن تمثيلها بنابض صلابته k ٠

١١ ــ ٢٨ ٠ وضح الصيغ العيارية لحالة اربعة جسيمات مرتبة بصورة خطية ٠ جد القيم العددية لنسب الترددات العيارية الثانية والثالثة والرابعة الى اوطأ او التردد العيارى الاول ٠

١١ ــ ٢٩ ٠ وتر خفيف طوله الطبيعي ℓ وصلابته k مط الى طول $\ell + \Delta\ell$ وحمل بعدد n من الجسيمات رتبت على مسافات متساوية على طول الوتر ٠ فاذا كانت m الكتلة الكلية لجميع الجسيمات n ٠ جد انطلاق الموجات الطولية والمستعرضة في الوتر ٠

١١ ــ ٣٠ ٠ حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها الوتر ثقيلا كثافته الخطية ρ بدلا من ان يكون محملا ٠

الفصل الثاني عشـر

النظرية النسـبية الخاصـــــة

The Special Theory of Relativity

قدمت النظرية النسبية الخاصة هنا بصورة مختصرة ، وهي تطوير مهم للفيزيـــــاء الحديثة كما ان لها تطبيقات تمتد من ديناميك النوويـة الى الميكانيك السـماوى وقـد اثرت هذه النظرية بعمق على مفاهيمنا للفضاء والزمن .

(١٢ــ ١) ملاحظات تمهيدية Introductory Remarks

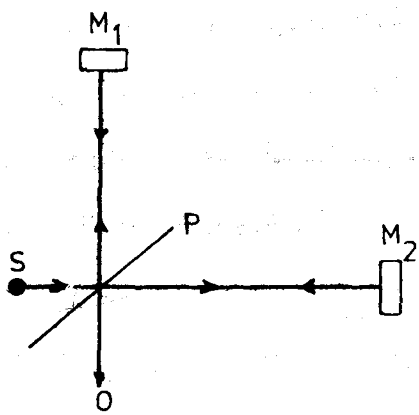
ان احدى التطورات المهمة التي حدثت في تاريخ الفيزياء خلال الجزء الاخيـــر من القرن التاسع عشر هي عندما اعلـــن جيمـــس كـــلارك ماكســـــــــويل ، James Clerk Maxwell نظريتـه الكهرومغناطيسية للضوء في عام ١٨٦١ . اذ نجحت هذه النظرية في توحيد كميات ضخمـة من المعارف التجريبية الخاصة في انتشـار الضوء خلال المادة بدلالة خواص كهربائية ومغناطيسية معروفـة لاوسـاط ماديـــــــة .

ولكن ، بالرغـم من نجـاح النظريـة الكهرومغناطيسـية العظيـم كما قدمهـــا ماكسـويل في بادئ الامر فانها كانت تحتوي على صورة مشوشـة عن فرضيـة كانـــت سائدة في ذلك الوقت حول وسط يتخلل كل شيء يسمى بالاثير . وان المحتويـــــات الرياضيـة والاستنتاجات النظريـة لم تتطلب فكـرة الاثير ولكـن تواجـده الفيزيائـــي كان يعتبر ضروريـا لانتشار الضوء خلال الفضاء الفارغ حتى ان ماكسويل ارتأى في سـنة ١٨٧٩ انـه قد يكون من الممكن حساب حركـة المنظومـة الشمسية خلال الاثيـــــر بملاحظـة التغييرات في انطلاق الضوء الظاهرى وذلك باستخدام طريقـة رومـــــــر Romer القديمـة المتضمنـة خسوف اقمار كوكب المشترى ولسوء الحظ لم تكـــــن البيانات الفلكيـة كافيـة الدقـة لهذا الغرض .

(١٢ــ ٢) تجربـة مكلسن ــ مورلي The Michelson-Morley Experiment

في هذا الوقت اصبح الفيزيائي الامريكي مكلسن الذى قاس انطلاق الضوء قبل هـذا

الوقت بدقة متناهية مولعا بفكرة امكانية الكشف عن حركة الارض خلال الاثير بواسطة الموجات الضوئية ، فصمم لهذا الغرض الخاص المدخال الضوئي Optical interferometer الذى يحمل اسمه الآن ويستعمل في قياسات متنوعة كثيرة اخرى ويبين الشكل (١٢ــ ١) رسما تخطيطيا لـه ٠ تنقسم حزمة ضوئية من المصدر S الى حزمتين بواسطة لوح زجاجي P هو عاكس جزئي للضوء ٠ فتنتقل احدى الحزمتين الى المرآة M_1 التي تعكس الضوء مرة ثانية الى P والحزمة الثانية تمر مباشرة خلال P الى المرآة M_2 التي تعكس الضوء ايضا الى P ٠ عندئذ تتحد الحزمتان المنعكستان في P وينعكس جزء من الضوء الى عين المشاهد في O ٠



الشكل ١٢ــ ١ رسم تخطيطي لتجربة مكلس ــ مورلي

وبسبب تداخل الامواج الضوئية الاتلافي والتقوية ، يشاهد نمط من الحزم المتداخلة المضيئة والمظلمة او نمط هدبي في مجال الرؤيا ٠ ويمكن جعل نمط التداخل يتغير بهدبية واحدة اذا ازيحت اى من المرآتين M_1 او M_2 مسافة مساوية لربع طول موجة ضوئية ٠ ان ازاحة مساوية لواحد من المليون من الانج

تقابل ازاحة مساوية لـ $\frac{1}{20}$ من طول الموجة او يمكن الكشف بسهولة عن $\frac{1}{5}$ تغيير مدبي ·

افرض الآن ان كلا المرآتين على نفس المسافة d من السفيحة P · فاذا كان الجهاز لايتحرك خلال زمن انعكاس الضوء الى الامام والخلف ، عندئذ تسود الموجتان الى P في نفس الوقت ويلتقيان بنفس الطور في O · ومن ناحية ثانية ، افرض ان الجهاز يتحرك بسرعة $\vec{v}$ باتجاه الحزمة الابتدائية من S · فالزمنان اللذان تستغرقهما الموجتان الجزيئتان بسفرتيهما المتتاليتين لن يكونا متساويين اذا فرضنا ان الضوء يسير بانطلاق ثابت c خلال الاثير · وهذه الحالة مشابهة لحالة سباحين ، احدهما يسبح ضد التيار وباتجاهه والآخر يعبر من جانب التيار الى الجانب الآخر ثم يعود · اذن الموجة التي تذهب الى M_2 تسير بانطلاق $c-v$ ، بالنسبة الى الجهاز ، وعند عودة هذه الموجة تسير بانطلاق نسبي مقداره $v + c$ · فالزمن الكلي t_2 للذهاب والاياب يكون اذن

$$t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2cd}{c^2-v^2} \qquad (١٢ـ١)$$

وبعكس ذلك ، فان الموجة التي تسير الى M_1 يكون انطلاقها النسبي $(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}$ بالنسبة الى الجهاز من قانون جمع المتجهات للسرع · فالزمن t_1 للسفرة عندئذ يكون

$$t_1 = \frac{2d}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (١٢ـ٢)$$

ووفقا لذلك ، الفرق في الزمن Δt يعطى من

$$\Delta t = t_2-t_1 = 2d\left[\frac{c}{(c^2-v^2)} - \frac{1}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{dv^2}{c^3} + \cdots \qquad (١٢ـ٣)$$

في هذه الفترة الزمنية يسير الضوء مسافة

$$\Delta \ell = c\,\Delta t = d\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots$$

هذا هو فرق الطريق (الفعلي) ويقابل الكسر

$$\frac{\Delta \ell}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \qquad (١٢ــ ٤)$$

لطـول موجـة الضوء λ ٠

لحركـة الارض المداريـة حول الشمس ، تكون قيمـة v/c حوالي ١٠ $^{-٤}$ ٠ وهذا يساوى فرق مسار فعلي يقدر بحوالي $\frac{١}{٦}$ طول موجـة ضوء الصوديوم الاصفـر ، $\lambda = 6\text{x}10^{-5}$ cm لمسار طولـه ١٠ امتار ٠(وفي الحقيقـة ان قيمة v/c السابقة هي القيمـة الصغرى المتوقعـة لان قيمـة v/c للمنظومـة الشمسية التي تنتج عـن دوران المجرة تقدر بحوالي ١٠ $^{-٣}$ ٠ وهذا سيرفع قيمـة فرق المسار الفعلي السابقـة بمقدار مرتبتين) ٠

كان مكلسن يأمل في تجاربـه ايجاد تغيير هدبي عند دوران المدخال بزاويـة ٩٠° وهكذا يسبب تأثير (رياح الاثير) الناتج بسبب حركة الارض تناوبا بين مسـارى الضوء ٠ لقد اجرى العالم المذكور تجربة اولية سنة ١٨٨١ باستعمال مسار طولـه ١٫٢ متر ٠ فكانت النتيجة سالبة ٠ ومع ذلك ، فان الكشف عن التغيير الهدبي المتوقـع بسبب حركة الارض المدارية ، يكاد يكون مستحيلا ٠ وبعد ست سنوات وبالتعاون مـع مورلي E.W. Morley بني مدخال محسن مساره الضوئي الكلي يساوى ١١ متـر ٠ وقد نصب الجهاز على قالب من الكرانيت طاف في بركـة من الزئبق ، فلوحظ التداخـل الهدبي باستمرار عند دوران القالب بزاويـة ٣٦٠° ٠ مرة ثانية وكما في التجربـة السابقة لم يلاحظ اى تغيير هدبي يمكن قياسه ولو هذه المرة ٠ كان المتوقـع الكشـف

بسهولة عن التغيير بسبب اعتبار انطلاق الارض المدارى فقط ٠

وقد جاءت النتائج السالبة لهذه التجارب للكشف عن حركة الارض خلال الاثير مفاجأة غير متوقعة لعلماء العالم ٠ لان الفكرة الثابتة عن وجوب انتشار الضوء في وسط ما خلال الفضاء اصبحت مرتابا في امرها ٠ وبدلا من ان يترك العلماء مفهوم الاثير حاول عدد من الرياضيين ايجاد تفاسير بديلة ٠

ومن اشهر هذه المحاولات التي قام بها كل من لورنس Lorentz وفتز جيرالد Fitzgerald منفردا عن الآخر في عام ١٨٩٢ ٠ فقد فرضا ان الجسم الصلد تتقلص ابعاده الموازية لحركته خلال الاثير بنسبة ٠ $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. وهذه الكمية في التقلص المعروفة بتقلص لورنس ــ فتزجيرالد تعادل المرات التي تجتازها مسارات الضوء في تجربة مكلسن ــ مورلي ولذلك لايظهر تغيير هدبي ٠

هذه الطريقة بالذات ليست مرضية لشرح الحقائق العملية لان الفرضية لم تكن عرضة للتحقيق المباشر ٠ ان اى محاولة لقياس تقلص لورنس ــ فتزجيرالد بطرق القياس التقنية الاعتيادية محكوم عليها بالاخفاق لان الجهاز يتقلص مع الجسم المراد قياسه ٠

ويجب ان نذكر بهذا الخصوص تجربة اخيرة اجريت سنة ١٩٣٢ من قبل كندى R.J. Kennedy وثورندايك E.M. Thorndike انهما استعملا في تجربتهما مدخالا لمكلسن فيه طولا مسارى الضوء مختلفان ٠ وقد لوحظ التداخل الهدبي لفترة زمنية طويلة (اشهر) وكان المدخال خلال هذه الفترة مثبتا في المختبر ولكنه طبعا يدور مع الارض ٠ وكما في تجربة مكلسن ــ مورلي لم تلاحظ اى ازاحة هدبية ٠

والان ، اذا قبلت فرضية تقلص مكلسن ــ مورلي كتفسير لنتيجة مكلسن ــ مورلي السالبة ، عندئذ تبقى النتيجة السالبة لتجربة كندى ــ ثورندايك دون تفسير ٠

فمن الضروري عندئذ وضع فرضية بخصوص قياس الزمن اذا استبقينا فكرة الاثير • هذه الطريقة لتفسير الحقائق التجريبية بصورة مختلفة عند ظهورها تبدو غير مرضية تماما خصوصا اذا كان بالامكان ايجاد معالجة نظرية عامة وسهلة • ولهذه الحالة وجدت نظرية كهذه وهي النظرية النسبية الخاصة •

١٢ــ ٣٠ فرضيات آنشتين في النسبية الخاصة

Einstein's Postulates of Special Relativity

افترض آنشتين في سنة ١٩٠٥ ان مفهوم الاثير والحركة " المطلقة " فيه لامعنى لهما كليا • ويتبصر مدهش نبذ فكرة الاثير كشيء غير ضروري وعوضا عن ذلك عرض اسلوبا جذريا وجديدا للبحث يستند على فرضيتين اساسيتين •

١ــ تصح قوانين الفيزياء بصورة متساوية في جميع المحاور المرجعية للاستمرارية Inertial reference systems .

٢ــ يكون انطلاق الضوء ثابتا لجميع المشاهدين بغض النظر عن اية حركة نسبية للمصدر او المشاهد •

وهاتان الفرضيتان تكونان اساس النظرية النسبية الخاصة (١) .

والفرضية الاولى هي امتداد لشرحنا السابق عن المحاور المرجعية للاستمرارية في البند (٥ ــ ٢) لتضمنها جميع قوانين الفيزياء وليس فقط قوانين نيوتن للحركة

---

(١) عالجت النظرية النسبية العامة التي صاغها آنشتين سنة ١٩١٦ المحاور المرجعية غير المستمرة • وقد تركزت بصورة كبيرة على ظاهرة الجاذبية •

كما ان آنشتين لم ينس قوانين الكهرومغناطيسية حيث اورد في بحثه مايلـــي (٢) .
ان المحاولات الفاشلة لاكتشاف ايـة حركـة للارض بالنسبة " للوسط الخفيف" توحي
ان ظاهرة الكهرومغناطيسية كالميكانيك لايمتلكان خواص تتعلق بفكرة السكون المطلق .
واستمر آنشتين في نفس المقال الخاص بحمله المشهور ليؤكد على فرضيته الثانيـــة
والتي هي اروع الفرضيتين . كما انـه وضع فرضيـة اخرى تظهر وكأنها متناقضـة مـــع
السابقة وهي ان الضوء ينتشر دائما في الفضاء الخالي بسرعة ثابتـة تساوى c وهـــي
لاتعتمد على حركـة مصدر الضوء .

١٢ــ ٤) تحويلات لورنتز The Lorentz Transformation

سنطبق في هذا البند فرضيات النسبية لاستنباط المعادلات الرياضية لتحويـــل
قياسات الموضع الفضائي والزمن بين مشاهدين B,A يتحرك كل منهما بالنسبة الى
الآخر بسرعة ثابتة v . ان النتيجة ، التي تعرف بتحويلات لورنتز سوف تكـــــون
الاساس لاستنتاجات اخرى من الفرضيات (٣) .

لنمثل محاور A بـ Oxyz ومحاور B بـ O′x′y′z′ ولتسهيل البحث سنفرض
ان المحوران Ox و O′x′ وهلم جرا متوازيان على التتالي ، وان الحركـة النســـبية
تكون باتجاه x ، اى ان ، المحاور التي تحمل الفتحـة تتحرك بالاتجاه x بانطلاق v
بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحـة (الشكل ١٢ــ ٢) .

---

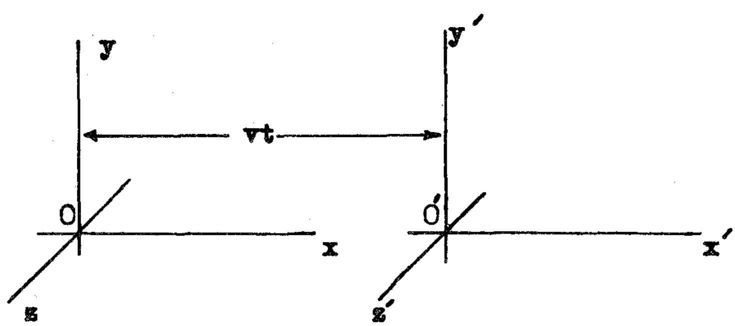
(٢) A. Einstein Ann. Physik, 17, 891 (1905), English Translation by W. Perrett and G.B. Jeffery in the Principle of Relativity, Dover, New York, 1923.

(٣) لورنتز هو اول من استنبط التحويلات سنة ١٩٠٤ من فرضيات الكهرومغناطيسية ولكن آنشتين اكتشفها بصورة مستقلة وبين انها تنتج من فرضيات النســـبية .

الآن اذا كانت نقطتا الاصل O و O' متطابقتان في الزمن $t = 0$ ، عندئذ المسافة OO' تساوى vt • ووفقا لعلم الحركة المجردة النيوتوني او الكلاسيكي تكون معادلات التحويلات عندئذ

$$x = x' + vt$$
$$y = y' \qquad (١٢-٥)$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

المعادلة $t=t'$ تعبر عن المساواة المفروضة لقياس الزمن للمشاهدين •(يستخدمان ساعتين متطابقتين) بعض الاحيان يسمى التحويل المذكور اعلاه بتحويل غاليلو •



الشكل (١٢ ــ ٢) : منظومتا المحاور في حركة نسبية

افرض اننا نعتبر تجربة خاصة ينبعث فيها وميض ضوئي من النقطة O في اللحظة $t = 0$ عندما تكون نقطتا الاصل O و O' متطابقتين ٠ ستنتشر الموجة الضوئية في جميع الاتجاهات بانطلاق c ٠ يمكن اذن تمثيل جبهة الموجة الضوئية بكرة متمددة تعطى بالمعادلة التالية

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{١٢ــ٦}$$

ووفقا لتحويلات غاليلو، تكون معادلة جبهة الموجة في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{١٢ــ٧}$$

هذه معادلة كرة نصف قطرها ct' متمركزة في النقطة $x' = -vt'$ على المحور ـ x' ٠

الآن ، اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه صحيحة ، تتحرك جبهة الموجة بانطلاق $c - v$ بالاتجاه الموجب للمحور ـ x' وبانطلاق $c + v$ باتجاهه السالب٠ وواضح ان هذا يناقض الفرضية الثانية ٠ لانه وفقا لهذه الفرضية يجب ان تنتشر جبهة الموجة بسرعة c في منظومتي المحاور٠ وبعبارة اخرى ، يجب ان يرى المشاهد B ايضا موجة منتشرة في جميع الاتجاهات بانطلاق c ٠ فيجب ان تكون معادلة جبهة الموجه في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{١٢ــ٨}$$

بدلا من المعادلة (١٢ــ٧)

نبغي الآن ايجاد تحويل يستنتج المعادلة (١٢ــ ٨) من المعادلة (١٢ــ ٦)٠

والتحويل الخطي (٤) . لحسن الحظ من النوع العام التالي

$$x' = a_{11}x + a_{12}t$$
$$t' = a_{21}x + a_{22}t \qquad (١٢\_٩)$$

ستعطي النتيجة المطلوبة بعد اختيار مناسب للمعاملات ٠ لما كانت الحركة النسبية باتجاه xx' فيمكننا ان نفرض $y'=y$, $z'=z$ وبالتعويض في المعادلة (١٢_ ٩) نحصل على ٠

$$(a_{11}x + a_{12}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{21}x + a_{22}t)^2 \qquad (١٢\_١٠)$$

هذه المعادلة يجب ان تكون متطابقة مع

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

اذن ،عند فك ومساواة معامل الحدود المتناظرة ، نجد ان

$$a_{11}^2 - c^2a_{21}^2 = 1 , \quad a_{11}a_{12} - c^2a_{21}a_{22} = 0$$
$$a_{12}^2 - c^2a_{22}^2 = -c^2 \qquad (١٢\_١١)$$

الآن ، عندنا اربعة مجاهيل ولكن ثلاث معادلات فقط٠ ولكن نعلم ان النقطة $x'=0$ هي نقطة الاصل O' ، التي تتحرك بانطلاق v ٠ باتجاه x٠

---

(٤) اذا كان التحويل غير خطي ، عندئذ تظهر الحركة المنتظمة في احدى المحاور معجلة لمشاهد في المحاور الثانية٠ هذه ليست حقيقية لان كل من منظومتي المحاور غير معجلة بالنسبة الى الاخرى ٠

اذن المعادلة

$$x' = 0 = a_{11}x + a_{12}t \quad (١٢ـ١٢)$$

يجب ان تختصر الى

$$x = vt$$

وبذلك نحصل على معادلة رابعة هي

$$v = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (١٢ـ١٣)$$

من المعادلتين (١٢ـ١٢) و (١٢ـ١٣) نجد بعد استخدام قليلا من الحسابات الجبرية ان المعاملات هي

$$a_{11} = a_{22} = \gamma$$

$$a_{12} = -\gamma v \quad (١٢ـ١٤)$$

$$a_{21} = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

حيــث

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (١٢ـ١٥)$$

اذن التحويل التالي يستوفي متطلباتنا وهو ان معادلة جبهة الموجــة المنتشــرة هــــي نفسها في منظومتي المحاور

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y \quad (١٢ـ١٦)$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

هذا هو تحويل لورنتز الذى يعبر عن الجوهر الرياضي للنظرية النسبية الخاصة ٠ ويمكن البرهنة بسهولة على ان معكوس التحويل السابق هو

$$x = \gamma (x' + vt')$$
$$y = y' \qquad (١٢ـ١٧)$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

نرى انه اذا كانت v صغيرة جدا بالمقارنة مع انطلاق الضوء ، عندئذ γ تساوى واحداً تقريباً ويختصر تحويل لورنتز الى تحويل غاليلو في الغاية ٠

(١٢ـ ٥) نتائج تحويل لورنتز ـ تقلص الطول وتمديد الزمن

Consequences of the Lorentz Transformation:

Length Contraction and Time Dilatation

هناك استنتاجان مدهشان ومباشران يمكن ان نستلمهما اذاً فرضنا ان تحويل لورنتز يصح فيزيائيا ٠ اعتبر اولا قياس الطول لقضيب ٠ لنفرض ان القضيب مثبت في المحاور التي تحمل الفتحة وواقع على طول المحور $0x'$ ٠ عندئذ طول القضيب كما يقيسه المشاهد B ، هو

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

حيث x_1' ، x_2' هما احداثيا طرفي القضيب ٠ الآن تتحول الكمية $x_2' - x_1'$ وفقا لتحويل لورنتز كالاتي

$$L_0 = x_2' - x_1' = \gamma \left[(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)\right]$$
$$= \gamma \left[L - v(t_2 - t_1)\right]$$

حيث $L = x_2 - x_1$ ٠ على فرض ان المشاهد A يقيس موضعي طرفي القضيب

في نفس الوقت (بالنسبة لـه) ، اى ان ، $t_2 = t_1$ ، عندئذ تختصر المعادلــة المذكورة اعلاه الى

$$L_o = \gamma L$$

او

$$L = \frac{L_o}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ L_o \qquad (١١ـ١٨)$$

اذ ن يقول المشاهد A ان طول القضيب هو اقصر مما يقوله المشاهد B • ويظهــر طول القضيب المتحرك قد قصر بنسبة $1/\gamma$ • هذا القصر الظاهرى يساوى عدديــا تقلص لورنتز ــ فتزجيرالد • ولكن مفهومي التقلصين مختلفا ن • لقد اعتبر تقلص لورنتز ــ فتزجيرالد حقيقا ولو انــه ظاهرة لايمكن قياسها ، بينما المفروض هو امكانيــة قيــاس التقلص النسبي ، ولو انــه تاثير ظاهرى •

ثم لنقارن فترات زمنيــة ، كما تحسب من تكتكــات ساعــة كبيرة ، يقيسهـــا المشاهدا ن ، لنفرض ان الساعــة في حالة السكون في المحاور التي تحمــل الفتحــة • فالفتــرة الزمنيــة T_o بين تكتكتين متتاليتين $t' = t'_1$ و $t' = t'_2$ هـــي

$$T_o = t'_2 - t'_1$$

او

$$T = t_2 - t_1 = \gamma \left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right]$$
$$= \gamma T_o + \gamma \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)$$

لما كانت الساعة في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحــة ، عند ئذ

$$x'_2 - x'_1 = 0$$

ووفقا لذلك

$$T = \gamma T_o = \frac{T_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (١٢ \_ ١٩)$$

اذن لايتفق المشاهدان على الفترات الزمنية بين التكتكات • المشاهد A يقول ان الفترات هي اطول مما يقوله B • فالساعة المتحركة تظهر بانها تنقص في الزمن بنسبة γ •

وفي المناقشات السابقة لايهم ابدا ان يسمى اي من المنظومتين بالمحاور المتحركة • قد يكون القضيب المقاس والساعة منقولين في المحاور التي تحمل الفتحة او التي لاتحمل الفتحة واى من المشاهدين قد يجد ان القضيب الآخر ظهر اقصر والساعة الاخرى ظهرت مقصرة في الزمن • قد تبدو هذه التعابير لاول وهلة متناقضة ولكن الامر ليس كذلك ، لانها نتائج مباشرة لتحويل لورنتز الذى يستنبط بدوره من فرضيات النسبية •

قد يكون من النافع ملاحظة ان تحويل لورنتز يقتضي ضمنيا ان المسافة المحضة او الفترة الفضائية في احدى المنظومتين تظهر كتركيب من مسافة وفترة زمنية في المنظومة الاخرى • وبالتماثل تظهر فترة زمنية محضة في منظومة كتركيب لفترة فضائية وزمنية في المنظومة الاخرى •

التواقت ونسبية الزمن
Simultaneity and the Relativity of Time

تبين الملاحظات السابقة ماقد يكون الفرق الاساسي بين نسبية نيوتن ونسبية آنشتين • خصوصاً ، اذا كانت $t_1 = t_2$ في احدى المحاور المرجعية ، بحيث تمثل الرموز السفلية 2, 1 الى حدثين متزامنين في تلك المحاور وليس من الضرورى ان تكون القيم المقابلة للزمنين t'_1 , t'_2 متساوية في محاور مرجعية مختلفة • وبعبارة اخرى ،

يتحقق مفهوم التوقيت فقط في محاور مرجعية خاصة . فاذا تقبلنا قواعد النظرية النسبية الخاصة ، فعلينا ان نتخلى عن فكرتنا الاولية والحدسية وهي ان الفضاء والزمن متميزان ومطلقان .

١٢ـ ٦) الفضاء والزمن **Space-time**

في محاور مرجعية معينة مكونة من مجموعة محاور ومنظومة ساعات لقياس الزمن ، فمجموعة القيم (x, y, z, t) يعين موضع في الفضاء تعينا كاملا في فترة زمنية خاصة تسمى حدث event . ويمكن اعتبار الحدث نقطة في اربعة ابعاد مستمرة تسمى الفضاء والزمن . ويمكن تمثيل الحدث الماضي والحاضر والمستقبل لجسم متحرك بمنحني واحد في الفضاء والزمن . ويسمى هذا المنحني بالخط العالمي للجسم .

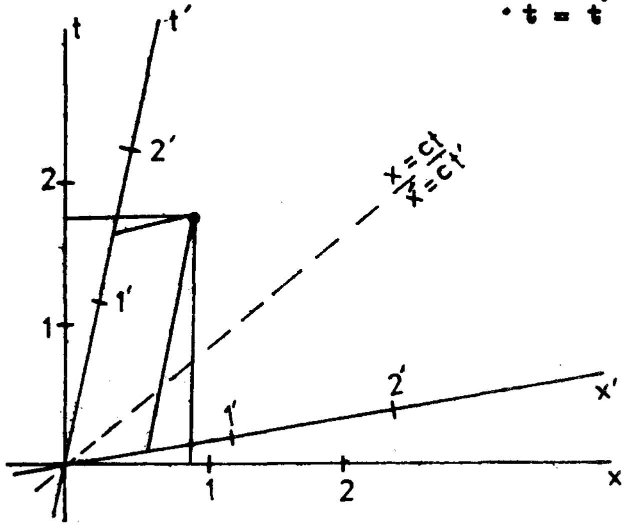
وواضح من تحويلات لورنتز ان تجزئة الفضاء . والزمن المستمر الى فضاء وزمن يعتمد على المحاور المرجعية الخاصة ، اى على حركة المشاهد . والمشاهدون المختلفون يجزؤنها بطرق مختلفة .

منحنيات الفضاء والزمن **Space-time Diagrams**

لكي نوضح الخطوط العالمية بيانيا ، من الضرورى طبعا ، حذف بعد واحد على الاقل من الابعاد الفضائية . ابسطها اخذ احداثي فضائي واحد والزمن ، بحيث يكون بياني الخط العالمي عبارة عن رسم اعتيادى للمسافة ضد الزمن . عندئذ ، كما في الحركة المجردة غير النسبية ، تكون الخطوط العالمية للجسيمات المتحركة بسرعة ثابتة مستقيمة ، بينما تكون الخطوط العالمية للحركة المعجلة منحنية .

ان تمثيل تحويلات لورنتز على منحني الفضاء والزمن يلقي الاضواء الكاشفة على ذلك . لنبدأ بالاحداثيين x و t للمحاور التي لاتحمل الفتحة كخطين متعامدين متقاطعين .

عندئذ نحصل على المحاور التي تحمل الفتحــة كما يلي ٠ اولا ، المحور ـ x' هو ذلـك الخط الذي يقابل $t' = 0$ ٠ اذن ، نرى من تحويلات لورنتز ان معادلة هذا الخـــط هي $t=vx/c^2$ بدلالة المحاور التي لاتحمل الفتحــة ٠ ثانيا ، للاحداثــي t' عندنا $x' = 0$ ٠ وتعطي تحويلات لورنتز $x = vt$ لهذا الخط ٠ اذن ، تميــل المحاور التي تحمل الفتحــة عن المحاور التي لاتحمل الفتحــة كما هو مبين في الشــكل ١٢ـ ٣ ٠ بالمناسبة ، نلاحظ ان تحويلات غـاليلو تعطي ايضا $x = vt$ للمحــور ـ t' ، ولكن المحور ـ x' ينطبق على المحور ـ x لان تحويلات غـاليلو للزمــن هــي $t = t'$ ٠



الشكل (١٢ـ ٣) احداثيات حدث في نظامين محاور مختلفيــن

والفرق الرئيسي بين تحويلات غـاليلو ولورنتز هو المقاييس ٠ تعين علامات القياس على المحاور التي تحمل الفتحــة هن تحويلات لورنتز على النحو التالي

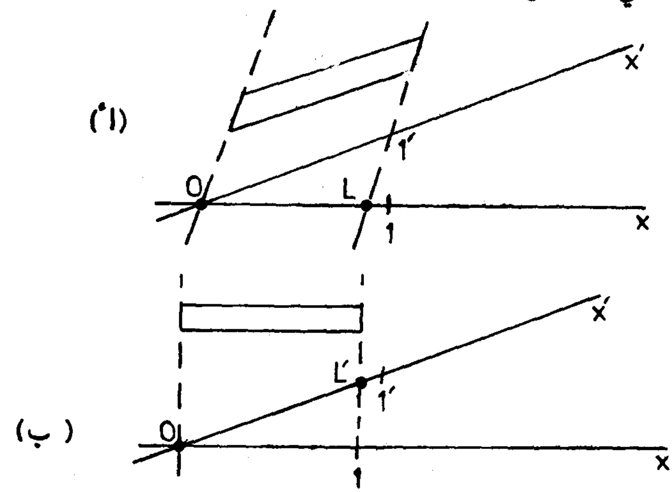
العلامــة $t'=0,\ x' = 1$ موضعها في النقطــــة $x = \gamma .1$ ،

$t=(\gamma v/c^2).1$ ، بالتماثل ، موضع علامة مقياس الزمن $x'=0$ ،
$t'=1$ في النقطة $t=\gamma.1,\ x=(\gamma v).1$ ، بالاستمرار على هذا النحو، يكون من الممكن بناء مجموعة كاملة من علامات المقياس وشبكة خطوط محز ز متقاطعة تعطي احداثيات اى حدث في اى محور من المحاور المرجعية التي تحمل الفتحة او التي لاتحملها . وبصورة خاصة ، لما كان انطلاق الضوء ثابتا في جميع المنظومات المرجعية ، عندئذ يكون للخط العالمي لوميض ضوئي نفس المعادلة في اى من منظومتي المحاور ($x'=ct',\ x=ct$) كما هو مبين في الشكل بالخط المنقط .

لقد وضح تقليص الطول وتمديد الزمن بسهولة في مخطط الفضاء والزمن . خذ ، على سبيل المثال ، طرفي قضيب مترى . فاذا كان القضيب المترى في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة $x'=0$ والآخر في النقطة $x'=1$ عندئذ يقطع خطا طرفيه العالميين المحور ـ x في النقطتين $0,\ L$ ، كما هو مبين في الشكل ١٢ ـ ٤ (آ) . والمسافة OL تمثل الطول المتقلص للقضيب المترى في المحاور التي لاتحمل الفتحة . وبالتماثل اذا كان القضيب المترى ساكنا في المحاور التي لاتحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة $x=0$ والطرف الآخر في النقطة $x=1$ عندئذ ، يقطع خطا طرفيه العالميين المحور ـ x في النقطتين 0 و L' ، الشكل ١٢ ـ ٤ ب فالمسافة OL' تمثل الطول المتقلص للقضيب المترى في المحاور التي تحمل الفتحة .

لرؤية تمديد الزمن ، اعتبر الحدث $t'=1,\ x'=0$ كما تبينه ساعة في حالة السكون موضوعة في نقطة اصل المحاور التي تحمل الفتحة . ويظهر هذا الحدث في الزمن $t=\gamma.1$ في المحاور التي لاتحمل الفتحة .

المعلّمة T' في الشكل (١٢ــ ٥)٠



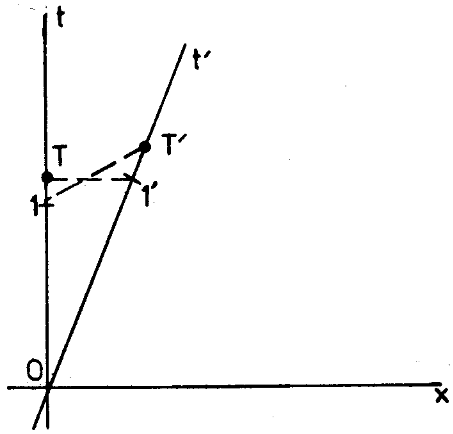
الشكل ١٢ــ ٤ : يوضح تقلص القضيب المتحرك الظاهري (قضيب متري) (أ) قضيب في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة (ب) قضيب في حالة سكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة٠ الخطان العالميان في طرفي القضيب مبينان بالخطوط المنقطة)٠

وبالتماثل الحدث $x = 0 , t = 1$ ،كما يقرأ من ساعة في حالة السكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة ، يحدث في الزمن $t' = \gamma .1$ في المحاور التي تحمل الفتحة٠ المعلّمة T' في الشكل ٠ في كل حالة تظهر الساعة في المحاور المعاكسة تبطيء ٠

١٢ــ ٧ ٠ الرحلة الفضائية وتوأم التناقض الظاهري

Space Travel and the Twin Paradox

افرض ان مسافرا بدأ بانطلاق عال رحلة الى نجم بعيد ٠ لنفرض ان رحلته تستغرق فترة زمنية معينة مثل T_0 ، كما تقاس بساعته التي يحملها معه ٠



(الشكل ١٢ــ٥ يوضح تنقيص الساعة المتحركة الظاهرى . المحور ــ t هو الخط العالمي للساعة في المحاور التي لاتحمل الفتحــة والمحور t' هو الخط العالمـــي للساعــة في المحاور التي تحمل الفتحــة) .

افرض انــه بعد وصولــه توقف ودار بسرعــه عائدا الى الارض بنفس السرعه بحيث كــا ن زمن الرحلة الكلي هو $2T_o$. وفقا لتحويل لورنتز ، المعادلة (١٢ــ ١٩) ، لايتأثر عامل تمديد الزمن γ باشارة v . وبناء على ذلك يكون الزمن الكلي للرحلة الانكفائيــة كما قيست بساعات الارض هو $(2T_o)\gamma$ ، اى انــه اكبر بالعامل γ من الزمن الذى قيس بساعة المسافر . الآن ، من المسلم بــه ان جميع العمليات التـــي تتاثــر بالزمن ، بضمنها ضربات القلب ، العمر ، وهلم جرا داخل المركبــة الفضائيـــة ستتغير بنفس المعدل الزمني كالساعــة المتحركــة ، (هذا يتفق مع الفرضية الاولى) . اذا كان الامر كذلك ، فان الذى يقوم برحلــة فضائيــة وكان لــه اخ توئم فانــه سيعود وهو اصغر من اخيــه التوئم الذى بقي في البيت . ولكن سبق ان بينا ان تمديد الزمن

هو تأثير معكوس فكل من التوأمين يستطيع ان يؤكد بان الاخ الآخر هو الذى قام بالسفره ولذلك كل منهما يدعي بان الاخ الآخر اصبح اصغر منه • وهذا هو توأم — التناقض الظاهرى المشهور الذى دار حوله جدل كثير • ويمكن حل هذا التناقض بملاحظة ان الرحلة الحقيقية هي التي قام بها الاخ التوأم الذى غير اتجاه سرعته وبذلك عانى تغييرا من محاور مرجعية الى اخرى • ويكون هو الذى اصبح اصغر سنا من الاخ التوأم الذى بقي في محاور مرجعية واحدة •

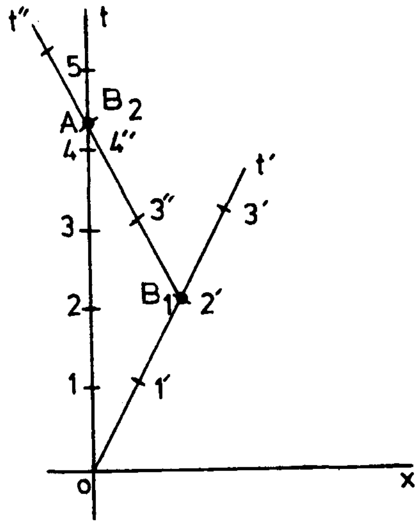
يمكن توضيح مزايا العمر غير المتماثل على منحني الفضاء والزمن • لنسم التوأمين بالرمزين A ، B ، ولنفرض ان A يبقى في البيت و B يقوم بالرحلة فالخطان العالميان للتوأمين هما OA و $OB_1 B_2$ في الشكل ١٢ـ ٦ •

تتضمن المسالة ثلاثة محاور للزمن • اولا • عندنا المحور — t الذى لايحمل الفتحة وهو كذلك الخط العالمي للتوأم A •

ثانيا ، هناك المحور — t' وهو الخط العالمي للتوأم B خلال الجزء الخارجي للسفرة • اخيرا ، هناك المحور — t'' الذى هو خط B العالمي لرحلة العودة • الخطوط العالمية الثلاث معلّمة بمقاييسها الزمنية على التتالي كما حسبت من تحويل لورنتز • يظهر الشكل ان الزمن الكلي على الخط العالمي OA يكون اكبر من الذى على $OB_1 B_2$ •

الزمن المناسب Proper Time

اذا كان على المسافر الفضائي في الشرح السابق ان يسافر بانطلاقات واتجاهات مختلفة عندئذ سيكون خطه العالمي اكثر تعقيدا من الرحلة المباشرة ذهابا وإيابا •



الشكل ١٢ــ ٦ : العمر غير المتماثل للتوأمين ٠ التوأم A يبقـى في البيـت والتوأم B يقوم بالرحلـة ٠

ومع ذلك ، لازال بامكاننا بناء مقياس زمني على الخط العالمي للساعـة المتحركـة٠ وهذا الزمن يسمى بالزمن المناسب ٠ لنستعمل الرمـز τ ليشير اليـه٠ عندئـذ ، على اى جزء صغير من الخط العالمي للساعة المتحركـة يرتبط عنصر الزمـن المناسـب $d\tau$ بعنصر الزمن المقابل لـه في المحاور الثابتـة بالعلاقـة التاليـة

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\, dt \qquad (١٢ــ٢٠)$$

حيث v تمثل الانطلاق الآني للساعـة المتحركـة ٠ اذن ، بين اى حدثين علـى الخط العالمي للاخير ، عندنا

$$\tau_1 - \tau_2 = \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

الآن عندما $v \neq 0$ يكون التكامل دائما اقل من واحد ، اذ ن

$$\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1$$

وبعبارة اخرى ، فترة الزمن المناسب بين الحدثين يكون دائما اقل من فترة الزمن المقابلة لها والمسجلة على المحاور المرجعية الثابتة بغض النظر عن شكل الخط العالمي للساعة المتحركة .

١٢ــ ٨ نسبية الحركة المجردة . تحويلات السرع

Relativistic Kimematics. Transformation of Velocities

من تفاضل المعادلات (١٢ــ ١٧) التي تمثل تحويلات لورنتز نحصل على

$$\begin{aligned} dx &= \gamma\,(dx' + v\,dt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \\ dt &= \gamma\,(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx') \end{aligned} \qquad (١٢ــ ٢١)$$

اذ ن ، بالقسمة ، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\,(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx')}$$

او
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'\right)}$$

(١٢ـ٢٢)
$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}}$$

(١٢ـ٢٣)
$$\dot{y} = \frac{\dot{y}'}{\gamma\left(1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}\right)}$$

(١٢ـ٢٤)
$$\dot{z} = \frac{\dot{z}'}{\gamma\left(1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}\right)}$$

حيث $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}$ ، وبالتماثل نحصل على مشتقات y , z .

ونحصل على مقلوب تحويلات السرعة بسهولة كما يلي

(١٢ـ٢٥)
$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}}$$

(١٢ـ٢٦)
$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)}$$

(١٢ـ٢٧)
$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)}$$

هناك نتيجة مباشرة ومهمة لمعادلات تحويل السرع السابقة هي ان السرع لاتتحد بعد ذلك بنفس الطريقة التي كانت تتحد بها في الحركة المجردة النيوتونية .

على سبيل المثال ، افرض ان الشاهد B يرى جسيماً يتحرك بسرعه $\dot{x}' = c/2$ في محاوره (التي تحمل الفتحة) ٠ اضف الى ذلك ، لنفرض ان المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بسرعة $c/2$ باتجاه x بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة (المشاهد A) ٠ عند ئذ وفقا للمعادلة (١٢ـ ٢٢) تكون سرعة الجسيم في المحاور التي لاتحمل الفتحة لاتساوى c وانما تساوى

$$\dot{x} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{(\frac{c}{2})(\frac{c}{2})}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}\, c$$

وكمثال ثانٍ ، نلاحظ اذا كان شيء ما يتحرك بسرعة c في احدى المحاور ، مثل $\dot{x}' = c$ ، عند ئذ

$$\dot{x} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

اى انه يتحرك بسرعة c في المحاور الاخرى ايضا ٠ وهذا يتفق مع فرضية النظرية النسبية الخاصة الثانية ٠

واخيرا لنفرض ان جسيما يتحرك في المستو ـ xy ٠ ولنفرض ان متجه سرعة الجسيم يميل بزاوية θ مع المحور ـ x ، بحيث يكون

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

عند ئذٍ من معادلات تحويلات السرع ، نحصل على

$$\tan\theta' = \frac{\dot{y}'}{\dot{x}'} = \frac{\dot{y}}{\gamma(\dot{x}-v)} = \frac{\tan\theta}{\gamma(1- v/\dot{x})} \qquad (١٢ـ ٢٨)$$

للزاوية بين متجه السرعة والمحور ـ x' كما يقيسها مشاهد في المحاور التي تحمل الفتحة ٠ في الحركة المجردة غير النسبية ، سوف لايظهر العامل γ ٠ وهذا يعني ان θ' هي اصغر في النسبية منها في الكلاسيكية ٠

١٢ــ ٩ • نسبية ديناميك الجسيم • تغير الكتلة مع السرعـــة

Relativistic Particle Dynamics. The Variation of Mass with Velocity

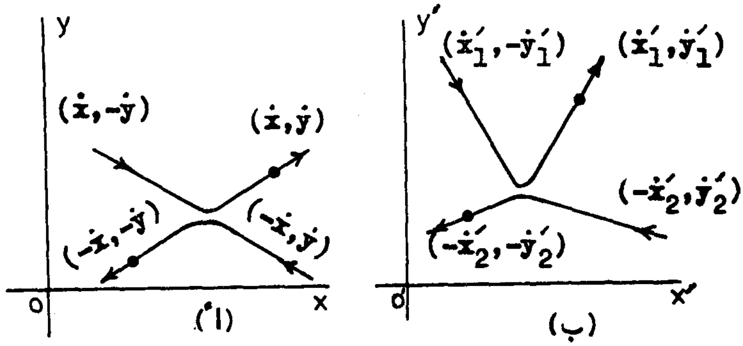
نستمر الآن في استقصاء المسالة الاساسية وهي كيف تؤثر تحويلات السرعة النسـبية على قوانين حركة الجسيم عند اعتبار القوى والكتل • نختار لهـذا الغرض مثالا بسيطاً يمكن التنبوء بنتائجــه من فرضيات التناظر الاوليــة •

اعتبر تصادم جسيمين متماثلين • وافرض ان التصادم تام المرونـة بحيـث يرتـــد الجسيمان دون تغيير في انطلاقهما النسبي • ليقترب الجسيمان احدهما من الآخـــر على طول مسارين متوازيين بسرعتين متساويتين ومتعاكستين في محاور مختاره بصــــورة مناسبة مثل $0xy$ ،كما في الشكل ١٢ــ ٧ (آ) • وتحدث الحركـة كليا في المستوى ــ xy • وقد صنف الجسيمان بالرقمين 1 ,2 ومركبتا سرعتيهما الابتدائيتيـــن بـ $(\dot{x}, -\dot{y})$ و $(-\dot{x}, \dot{y})$ على التتالي • ويعاني كل من الجسـيمين ، عند التصادم انعكاسا في مركبــة y لسرعتيهما ، اما مركباتهما باتجاه x فتبقى دون تغيير • اذن المركبتان النهائيتان هما ، $(\dot{x}, \dot{y})$ و $(-\dot{x}, -\dot{y})$ كما هو مبيـــن في الشكل •

لنصف بعد ذلك ، نفس التصادم في محاور مختلفـة مثل $0\acute{x}\acute{y}$ ،والتي تتحرك بسرعة v باتجاه x بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحـــة •

ولم يعد هناك ، في المحاور التي تحمل الفتحة ، تصادم تام التناظر ،ولذلـك مـــن الضروري استعمال رموز سفلية لتشير الى سرعتي الجسيمين •

ان مركبات السرعة الابتدائية في المحاور التي تحمل الفتحـة هي $(\dot{x}_1', -\dot{y}_1')$ و $(-\dot{x}_2', \dot{y}_2')$ للجسيمين $2,1$ على التتالي • وبعد التصادم تعاني مركبتـا



الشكل ١٢ــ٧ منحنيات التصادم المائل المرن في نظامين محاور مختلفين

تغييرا في الاتجاه بينما تبقى مركبتا $\dot{x}'$ دون تغيير . فالقيم النهائية تكون اذن ($\dot{x}'_1$, $\dot{y}'_1$) و ($-\dot{x}'_2$, $-\dot{y}'_2$) كما هو مبين في الشكل ١٢ــ٧ب .
ووفقا لقواعد تحويلات السرعة ، البند ١٢ــ٧ نحصل للجسيم (آ) على

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}'_1 - v}{1 - \dot{x}'_1 v/c^2} \qquad \dot{y} = \frac{\dot{y}'_1}{\gamma(1 - \dot{x}'_1 v/c^2)}$$

وبالتماثل للجسيم 2 نحصل على

$$-\dot{x} = \frac{-\dot{x}'_2 - v}{1 + \dot{x}'_2 v/c^2} \qquad -\dot{y} = \frac{-\dot{y}'_2}{\gamma(1 + \dot{x}'_2 v/c^2)}$$

وعند حذف $\dot{x}$, $\dot{y}$ من العلاقتين نحصل على

$$\frac{\dot{x}'_1 - v}{\dot{x}'_2 + v} = \frac{\dot{y}'_1}{\dot{y}'_2} = \frac{1 - v\dot{x}'_1/c^2}{1 + v\dot{x}'_2/c^2} \qquad (١٢ــ٢٩)$$

واذا حذفنا v من المعادلتين المذكورتين اعلاه نحصل بعد اجراء بعض العمليات الجبرية على العلاقة التالية

$$\frac{\dot{y}_1'}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{\dot{y}_2'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \qquad (١٢ـ ٣٠)$$

حيث ان

$$v_1^2 = \dot{x}_1'^2 + \dot{y}_1'^2$$
$$v_2^2 = \dot{x}_2'^2 + \dot{y}_2'^2$$

ووفقا للنتيجة السابقة تتغير مركباتي y' لسرعتي بمقادير مختلفة كنتيجة للتصادم ، لان $\dot{y}_1'$ و $\dot{y}_2'$ مختلفان .

اذ ن اذا كانت كتلتا الجسيمين متساويتين فمركبتي y' لزخميهما تتغيران عندئذ ، بمقادير مختلفة ، اى سوف لايكون عندنا زخم خطي محفوظ . اذ ن امامنا اختياران ، اما ان ننبذ قانون حفظ الزخم الخطي ، او يجب علينا ان نفرض ان كتلة الجسيم تعتمد بطريقة ماعلى حركة الجسيم بالنسبة لمشاهد معين . وبدلا من نبذ قانون حفظ الزخم الخطي ، اخترنا البديل الآخر . سنفرض ان كتلة الجسيم المتحرك تساوى (كتلة السكون) m_0 (اى كتلته كما تقاس في محاور مرجعية يكون فيها الجسيم ساكنا) .
ومضروبة بدالة ما للانطلاق . اى

$$m = m_0 \, f(v)$$

من العلاقة المبينة في المعادلة (١٢-٣٠) ، نلاحظ ان مركبتي y' للزخم الخطي تكون محفوظة اذا اخترنا

$$f(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = \gamma$$

حيث v تمثل انطلاق الجسيم ، اى v_1 او v_2 على التتالي ، اذن كتلة الجسيم المتحرك تصبح

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_o \qquad (١٢-٣١)$$

ووفقاً للنتيجة السابقة ، تزداد الكتلة مع الانطلاق وتقترب قيمتها من المالا نهاية عندما يقترب انطلاقها من انطلاق الضوء . وفي الاجسام المرئية الاعتيادية تزداد الكتلة بمقدار صغير جدا بحيث لا يمكن قياسه كالقذائف ولكن اقتراب انطلاقات الجسيمات الذرية من سرعة الضوء شيء اعتيادي . لقد حققت علاقة الكتلة والسرعة النسبية ، المعادلة (١٢-٣١) ، تجريبيا الى درجة كبيرة من الدقة مع الالكترونات والجسيمات الاخرى التي تنتج في المعجلات ذات الطاقة العالية .

١٢-١٠ . علاقة الكتلة والطاقة

The Mass-energy Relation

لنعتبر الشغل W المنجز لتعجيل جسيم حر من السكون الى انطلاق نهائي v . اذا كانت $\vec{F}$ القوة المسلطة على الجسيم عندئذ

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m_o \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad (١٢-٣٢)$$

وللبساطـة ، لنفرض فقط الحركة على خط مستقيم ، كالمحور ـ x في اى محاور مناسبة ، بحيث يمكننا كتابـة

$$dW = F\,dx = dx\,\frac{d(m\dot{x})}{dt} = \dot{x}d\,(m\dot{x})$$

و

$$W = \int_0^v \dot{x}d(m\dot{x}) = \Big[\dot{x}(m\dot{x})\Big] - \int_0^v m\dot{x}\,d\dot{x}$$

$$= mv^2 - m_o \int_0^v \frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}$$

$$= mv^2 + m_o c^2 \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1\right)$$

$$= mc^2 - m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٣)$$

ولما كان الشغل الكلي المنجز على جسيم حر يظهر كطاقـة حركيـة T للجسيـم ، نحصل على

$$T = mc^2 - m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٤)$$

او مايكافيء ذلك

$$T = (\gamma - 1)\,m_o c^2 \qquad (١٢ـ ٣٥)$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين ، نحصل على

$$T = m_o c^2 \left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \tfrac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} m_o v^2 + \tfrac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

اذن تختصر T الى قيمتها الكلاسيكية $\frac{1}{2}m_o v^2$ عندما تكون v صغيرة جدا بالمقارنة مع c ٠

واذا كتبنا العلاقة النسبية للطاقة الحركية على النحو التالي

$$m = m_o + \frac{T}{c^2} = m_o + \Delta m$$

نرى ان الطاقة الحركية تكافيء كتلة Δm حيث

$$T = \Delta mc^2 \qquad (١٢\_٣٦)$$

عمم انشتاين وجهة النظر هذه بقوله ان اى كتلة m تكافيء مقدارا من الطاقة E ٠ حيث

$$E = mc^2 \qquad (١٢\_٣٧)$$

عند ئذ يجب تحوير قانون حفظ الطاقة ليتضمن الكتلة كشكل من الطاقة ٠

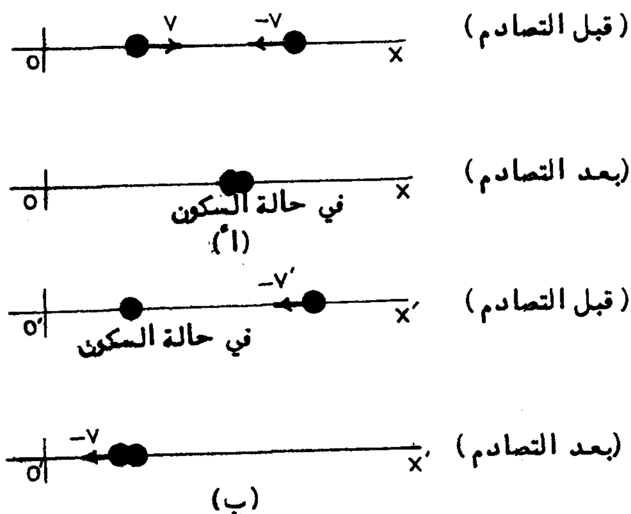
لقد حققت المعادلة المذكورة اعلاه تجريبيا ، فمثلا في حالة الانشطار النووى ، تكون الكتلة الكلية للشظايا المنشطرة اقل من كتلة النواة الاصلية ،فالفرق في الكتلة يظهر كطاقة ٠

استمرارية الطاقة الحرارية Inertia of Thermal Energy

كمثال بسيط لعلاقة الكتلة والطاقة ، لنعتبر حالة التصادم غير المرن لجسيمين ٠ افرض ان كتلتي السكون للجسيمين متساويتان وهي m_o ، وانهما يتصادمان راسيا بسرعتين ابتدائيتين v و $-v$ على التتالي ، باتجاه x لمحاور مناسبة مثل Oxy ، كما هو مبين في الشكل ١٢ــ ٨ (آ) ٠ لنفرض ان التصادم غير مرن تماما بحيث ان الجسيمين يبقيان معا بعد التصادم ٠ ومن التناظر يكون هذا الزوج

في حالة سكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة ٠ والزخم الخطي الكلي قبل التصادم هو $mv + (-mv) = 0$ وهو يساوى صفرا ايضا بعد التصادم٠ اذ ن الزخم الخطي يكون محافظا في المحاور Oxy ٠

ثم لنصف بعد ذلك نفس التصادم في محاور مختلفة مثل $O'x'y'$ تتحرك بانطلاق v بالاتجاه x بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة٠



الشكل (١٢ــ ٨) مخطط لتصادم راسي غير مرن تماما لجسيمين

الشكل (١٢ــ ٨(ب)) ٠ في هذه المحاور ٠ يكون احد الجسيمين في البدء في حالة السكون٠ بينما تكون سرعة الجسيم الآخر قبل التصادم كما يلي

$$-v' = \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}/c^2} = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2}$$

ووفقا لقوانيننا لتحويلات السرع٠

ان سرعة الجسيم المركب بعد التصادم هي $-v$ في المحاور التي تحمل الفتحة ،

اذن الزخم الخطي في المحاور التي تحمل الفتحة هو كما يلي

قبل التصادم

$$-m'v' = -m_o \gamma (v')v'$$

حيث

$$\gamma(v') = (1 - v'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$v' = 2v(1 + v^2/c^2)^{-1}$$

بعد التصادم

$$-\bar{m}v = -\bar{m}_o \gamma(v)v$$

حيث

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ترمز هنا $\bar{m}_o$ لكتلة سكون الجسيم المركب المتكون بعد التصادم.

الآن اذا وضعنا بكل بساطة $\bar{m}_o = 2m_o$ نجد ان الزخم الخطي الابتدائي لايساوى النهائي في المحاور التي تحمل الفتحة. ان سبب ذلك يرجع الى اهمالنا زخم الطاقة الحركية T الذى تحول الى حرارة اثناء التصادم، ولاجل اخذ هذا الزخم بنظر الاعتبار يمكننا اضافة كتلة مقدارها T/c^2 للجسيم المركب ، اى

$$\bar{m}_o = 2m_o + \frac{T}{c^2}$$

$$= 2m_o + 2m_o(\gamma - 1)$$

$$= 2m_o \gamma$$

حيــث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

في الحقيقــة وجد ان الزخــم الخطي يكون محافظا في المحاور التي تحمــل الفتحــة ، لهذه القيمــة لكتلــة السكون ٠

خلق وابادة زوج جسيم ــ وجسيم مضاد

Creation and Annihilation of Particle-antiparticle Pairs

قد يكون، احسن توضيح مباشر لعلاقــة الكتلــة ــ والجسيم هو مايتعلق بــــزوج جسيم ــ وجسيم مضاد ٠ لقد ظهر الآن ان كل الجسيمات الاولية في الطبيعــة مثــــل الالكترونات ، والبروتونات ، والنيوترونات ، وما الى ذلك ، لها جسيم نظيــر مضــاد ٠ وفي كل حالة ، يكون للجسيم المضاد نفس كتلــة الجسيم ولكن لــه خواص كهرومغناطيسية معاكسة (شحنة ، عــزم مغناطيسي) وفي كل حالة يمكن خلق زوج جسيم ــ وجسيــم مضاد بانفاق طاقــة كافيــة او ان يبيــد احدهما الآخر فتتحرر طاقــة ٠ ان اول جسيم مضاد اكتشف هو الالكترون المضاد او البوزترون وذلك سنة ١٩٣٢ ٠ وقد لوحظ فــــي الاشــعة الكونيــة وفي اضمحلال اشعة بيتا المنبعثة من نوايا مشعة معينة ٠ وعندمـــا تلامس البوزترونات مادة عادية تباد تماما وذلك وفقا للعلاقــة التالية

بوزترون + الكترون ⟵——— طاقــة

حيث تتحول الكتلــة الكليــة الى اشعة كامــا عالية الطاقــة ٠ ويمكن ان تحدث عكــس العملية وذلك عندما تضرب اشعة كاما العالية الطاقــة ذرات مادة ملائمة ٠ ويمكن ايضــا استحداث جسيمات مضادة بضرب الذرات مباشرة بجسيمات عالية الانطلاق ٠

من كتلــة الالكترون المعروفــة وجد ان طاقــة السكون m_oc^2 هي بحــدود

0.5 MeV (مليون الكترون ــ فولت) اى ان خلق وابادة الكترون ــ بزتـــرون يستلزم طاقات من القدر ال MeV • ولما كانت كتلتا البروتون والنيوترون هـــي حوالي ١٨٠٠ مرة اكبر من كتلة الالكترون فهذا يعني ان خلقها يستلزم طاقــة اكبــر • ولهذا السبب لم يكتشف البروتون المضاد او النيوترون المضاد الا بعد ان بدأت معجلات ذات بليون الكترون ــ فولت عملها في اواخر الخمسينيات •

لنحسب الطاقــة اللازمــة لانتاج زوج بروتون ــ بروتون مضاد من تصادم بروتونين بحيث يكون احد البروتونين ، الهدف ،في حالة السكون • وستعطي الطاقة الصغــرى من الحالة التي يكون فيها الجسيمان الاصليان والزوج المخلوق في حالة السكون فــي محاور مركز الكتلــة مباشرة بعد عملية انتاج الزوج • اذن ، يقترب البروتونان احدهمـا من الآخر بالسرعتين v' و $-v'$ في محاور مركز الكتلــة بحيث لكل بروتون كتلـــــة سكونـه m_o نحصل على

$$mc^2 = 2m_oc^2$$

او

$$m = 2m_o = m_o \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

اذن

$$\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

بحيث يكون في محاور مركز الكتلــة

$$v' = c\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولهــذا الســبب يكــون انطــلاق البروتون الســاقط v فــي المحــاور المختبريــة هــو

$$v = \frac{v' + v'}{1 + v'^2/c^2} = \frac{2(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} c}{1 + (\frac{3}{4})} = (\frac{48}{49})^{\frac{1}{2}} c$$

وفقاً لقوانين تحويل السرعة . واخيراً ، نجد ان طاقة البروتون الساقط في المحاور المختبرية تعطى من

$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{48}{49}}} = 7m_o c^2$$

بحيث ان الطاقة الحركية $T = 6m_o c^2$ او حوالي 5.5 BeV

*١٢ــ ١١ . استخدام المصفوفات والمتجهات ــ الاربعة في النسبية

The Use of Matrices and Four-vectors in Relativity

رأينا ان المتطلب الرئيسي لتحويل لورنتز هو ان

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

كمية ثابتة invariant او لها نفس القيمة في جميع المحاور المرجعية ، وهذا يعني ، ان لاى نظامين

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

لندخل الرموز الجديدة التالية

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= ict \end{aligned} \qquad (١٢ــ ٢٨)$$

ويمكن اعتبار الكميات $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ x_μ كمركبات متجهة في فضاء ذى اربعة ابعاد . ان "طول" المتجه هو الكمية s والمعرفة كالاتي

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \qquad (١٢-٣٩)$$

ان الخاصة الاساسية لتحويلات لورنتز هو انه يترك مقدار s ثابتا . ويمكن التعبير عن هذا كالاتي

$$\sum_\mu x_\mu^2 = \sum_\mu x_\mu'^2$$

ويمكن التعبير عن تحويلات لورنتز نفسه بصيغة المصفوف كما يلي

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (١٢-٤٠)$$

حيث

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad (١٢-٤١)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (١٢-٤٢)$$

ويطبق المصفوف في المعادلة (١٢ـ٤٠) للحالة الخاصة وهي الحركة الانتقالية في اتجاه المحور ـ x_1 • ويمكن ايجاد معادلات المصفوف بسهولة للحركة الانتقالية في الاتجاهات الاخرى •

من الممتع ملاحظة انه من الممكن جعل مصفوف التحويل للورنتز يشابه مصفوف الدوران البسيط في الفضاء الاعتيادي وذلك بادخال التعويض التالي

$$\gamma = \cos \psi$$

ولما كانت γ اكبر من واحد ، لذلك تكون ψ خيالية • عندئذ نحصل على

$$\sin \psi = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = i\beta\gamma$$

اذن يمكن كتابة المصفوف لتحويل لورنتز على النحو التالي

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

نتذكر من الفصل الاول ان مصفوف التحويل للدوران خلال زاوية حقيقية θ حول المحور ـ z هو

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في الفضاء ذى الابعاد الاربعة ، دوران كهذا حول المحور ـ z او x_3 سيمثل بالمصفوف

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان الدوران حول احد المحاور الفضائية يترك طول المتجه الرابع ايضا دون تغيير ، عندئذ دورات كهذه يمكن ادخالها ضمن مجموعة التحويلات العامة للورنتز . احدى فوائد المصفوف هو امكان معالجة تراكيب تحويلات لورنتز بسهولة بواسطة ضرب المصفوفات .

تعريف المتجه الرباعي العام

قد يعرف المتجه ـ الرباعي بطريقة عامة كمجموعة لاربع كميات

$$A_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

تتحول بنفس طريقة احداثيات الموضع x_μ تحت تحويل لورنتز . اى ان

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \qquad (٤٣\text{ــ}١٢)$$

او بصيغة مختصرة

$$[A'] = [L] \ [A] \qquad (١٢ـ ٤٤)$$

تشير الكميات التي تحمل الفتحة الى مركبات المتجه الرباعي في المحاور المرجعية التي تتحرك بسرعة نسبية $v = \beta c$ في الاتجاه x_1 و $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

وواضح ان المقدار لاى متجه ـ رباعي يبقى لايتغير او ثابتا تحت تحويل لورنتز

$$\sum_{\mu} A'^2_{\mu} = \sum_{\mu} A^2_{\mu}$$

ويقال عن مركبات المتجه ـ الرباعي بانها مساوية في درجة ثبوتها covariant بالنسبة الى تحويل لورنتز ٠

ان مفهوم المتجه ـ الرباعي مفيد جدا في النظرية النسبية ووفقا للفرضية الاولى تكون جميع المحاور المستمرة متماثلة تماما ٠ وهذا ، عندما يوحد مع الفرضية الثانية ، يعطى تحويل لورنتز الذى يربط المشاهدات بين انظمة محاور مستمرة مختلفة ٠ اذن ، عندما يصاغ اى قانون فيزيائي ، بصورة ملائمة ، يجب ان تبقى صيغته ثابتة عندما ينسب الى منظومات محاور مستمرة مختلفة ولاسيما اذا احتوت معادلة على كميات متجهة فيجب ان توضع بصيغة المتجه ـ الرباعي لكي تكون صحيحة من النظرة النسبية ٠ وهذا يؤمن ان المعادلة ستتحول بدرجة متساوية الثبوت تحت تحويل لورنتز ، ولهذا السبب تستوفى المعادلة فرضيتين النسبية الخاصة ٠

صيغة المتجه ـ الرباعي للسرعة والزخم

The Four-vector Form of Velocity and Momentum

افرض ان جسيما متحركا خطه العالمي يعين تعينا كاملا في محاور مرجعية معينة بالعلاقات $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = t$ او مايكافيء

ذلك $x_1=x_1(x_4)$ ، $x_2=x_2(x_4)$ ، $x_3=x_3(x_4)$ ، $x_4=x_4$ • رأينا ان المحاور الموضعية x_μ تتحول كمتجه ــ رباعي و•وفقا لذلك • الفرق Δx_μ بين اى نقطتين على الخط العالمي يتحول ايضا كمتجه ــ رباعي • ولكن النسبة

$$\frac{\Delta x_\mu}{\Delta t} = ic\,\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x_4}$$

هي ليست متجه ــ رباعي • لان Δt له قيم مختلفة في منظومات محاور مرجعية مختلفة • لاجل ايجاد صيغة المتجه ــ الرباعي للسرعة • نستخدم حقيقة كون الفترة الزمنية المناسبة $\Delta\tau$ بين حدثين هي كمية ثابتة• ولبرهنتها عندنا

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

او

$$(\Delta r)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta r')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

اذن

$$\Delta t\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \Delta t'\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r'}{\Delta t'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ووفقا لذلك تكون الفترة الزمنية المناسبة $\Delta\tau$ هي

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta t'\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

اى ان $\Delta\tau$ لاتتغير invariant • هنا u و u' هما انطلاقا الجسيم في نظامي المحاور المرجعية •

نرى الآن ان المتجه

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

يتحول بنفس طريقــة x_μ ولذلك يعرف متجــه ــ رباعي • وسوف نسميــه السـرعــه ــ الرباعيــة • وتعطى مركبات السرعة الرباعيــة بوضوح كما يلي :

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{dx_1}{d\tau} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} = \gamma(u)\dot{x} \\
V_2 &= \frac{dx_2}{d\tau} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} = \gamma(u)\dot{y} \\
V_3 &= \frac{dx_3}{d\tau} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} = \gamma(u)\dot{z} \\
V_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = ic\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma(u)ic
\end{aligned}
\qquad (١٢\_٤٦)
$$

لقيم صغيرة لـ u تتحول المركبات الفضائية الثلاث لـ V_μ الى مركبات السرعــه الاعتيادية $\vec{u}$ • ويعطى مربع السرعه ــ الرباعية من

$$
\begin{aligned}
\sum_\mu V_\mu^2 &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\ \gamma^2(u) - c^2\gamma^2(u) \\
&= (u^2 - c^2)\ \gamma^2(u) = -c^2
\end{aligned}
\qquad (١٢\_٤٧)
$$

والآن لما كانت السرعة ــ الرباعية تتحول كمتجــه رباعي ، فيمكننا كتابــة

$$
\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
\qquad (١٢\_٤٨)
$$

او بوضوح

$$V_1' = \gamma V_1 + i\beta\gamma V_4$$
$$V_2' = V_2$$
$$V_3' = V_3 \qquad (١٢ـ٤٩)$$
$$V_4' = -i\beta\gamma V_1 + \gamma V_4$$

حيث $\gamma = \gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. بناء على ذلك ، ومن معاينة المعادلات (١٢ـ ٤٦) نجد أن مجموعة المعادلات المذكورة اعلاه تكافيء الى

$$\dot{x}'\gamma(u') = (\dot{x} - \beta c)\gamma\gamma(u)$$
$$\dot{y}'\gamma(u') = \dot{y}\gamma\gamma(u)$$
$$\dot{z}'\gamma(u') = \dot{z}\gamma\gamma(u) \qquad (١٢ـ٥٠)$$

$$\gamma(u') = (1 - \frac{\dot{x}\beta}{c})\gamma\gamma(u) \qquad (١٢ ـ ٥١)$$

اذا حذفنا $\gamma(u')$ من المعادلات الثلاث الاولى وذلك باستعمال (الاخيرة) نجد ان

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - \beta c}{1 - \dot{x}\beta/c}$$
$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)} \qquad (١٢ـ٥٢)$$
$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

هذه في الحقيقـة هي نفس قوانين تحويل السرعة التي استنبطت سابقا بطريقة مختلفـة في البند ١٢ـ ٨ ٠

الزخـم ٠ الرباعـي **Four-Momentum**

يعرف الزخـم ـ الرباعي كالآتي

$$P_\mu = m_o V_\mu \qquad (١٢ـ ٥٣)$$

وواضح انـه يتحول كمتجـه ـ رباعي ، لان كتلـة السكون m_o لاتتغير ٠ ومركبـات الزخـم ـ الرباعي هي

$$\begin{aligned}
P_1 &= m_o \frac{dx_1}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} \\
P_2 &= m_o \frac{dx_2}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} \\
P_3 &= m_o \frac{dx_3}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} \\
P_4 &= m_o \frac{dx_4}{d\tau} = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} ic
\end{aligned} \qquad (١٢ـ ٥٤)$$

اذا ادخلنا الكتلـة النسبية m والمعرفة بالعلاقـة التاليـة

$$m = m_o \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (١٢ـ ٥٥)$$

عند ئذ يمكننا كتابـة

$$P_\mu = m_o \frac{dx_\mu}{d\tau} = m \frac{dx_\mu}{dt} \qquad (١٢ـ ٥٦)$$

اى ان

$$P_1 = m\dot{x}$$

$$P_2 = m\dot{y} \qquad (١٢ـ ٥٧)$$

$$P_3 = m\dot{z}$$

$$P_4 = icm$$

اذ ن المركبات الفضائية للزخم ـ الرباعي تشبه تماما مركبات الزخم الاعتيادى ولكن تستعمل هنا الكتلة النسبية بدلا من كتلة السكون .

ان مقدار الزخم ـ الرباعي لايتغير ، كما يجب ان يكون ، لان

$$\sum_{\mu} P_{\mu}^2 = m^2u^2 - m^2c^2 = m_o{}^2(u^2 - c^2)\,\gamma^2(u) = -m_o{}^2c^2$$

لندخل الكمية E ، الكتلة والطاقة النسبية ، المعرفة كالاتي

$$E = -icP_4 = mc^2 \qquad (١٢ـ ٥٨)$$

عندئذ يمكن التعبير عن ثبوت مقدار الزخم ـ الرباعي كما يلي

$$\sum P_{\mu}^2 = P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_o{}^2c^2 \qquad (١٢ـ ٥٩)$$

اذا اعتبر بقاء الزخم ـ الرباعي كمتجه في الفضاء ـ الرباعي كتعميم طبيعي لقانون حفظ الزخم الاعتيادى ، نرى من المعادلات (١٢ـ ٥٧) ان قانون الحفظ الاعتيادى يستبقى اذا استعملت الكتلة النسبية في كل مكان . اضف الى ذلك ، ان بقاء المركبة الرابعة للزخم ـ الرباعي يعني ان الكتلة النسبية الكلية $\sum m$ ، او الكتلة والطاقة $\sum E$ تكون محافظة في اى محاور مرجعية معينة .

افرض على سبيل المثال عمليــة خلق الزوج pair creation التي شرحت سابقا في البند ١٢ــ١٠ . لنفرض ان بروتونين قد تصادما بطاقــة في نهايتها الصغـــرى اللازمــة لتكوين بروتون وبروتون-مضاد في نظام مركز ــ الكتلــة . عندئذ تكون كتلة السكون النهائيــة $4m_o$ لان الجسيمات الاربعــة النهائية تكون ساكنة في نظام مركـــز ــ الكتلــة . قبل التصادم ، عندنا في النظام المختبرى $E + m_o c^2$ للكتلــة والطاقـــة الكليــة للبروتونين الساقط والهدف . اذن يمكن التعبير عن ثبوت مقدار ــ الرباعــــي كما يلي

$$P^2 - \frac{(E + m_o c^2)^2}{c^2} = -16 m_o{}^2 c^2$$

او ، بعد ترتيب الحدود نحصل على

$$P^2 - \frac{E^2}{c^2} - 2Em_o = -15\ m_o{}^2 c^2$$

وفوق ذلك ، لما كان الحدان الاوليان يشيران الآن الى البروتون الساقط ، يكـــون عندنا $P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_o{}^2 c^2$ ،وبناء على ذلك

$$-m_o{}^2 c^2 - 2Em_o = -15\ m_o{}^2 c^2$$

او

$$E = 7\ m_o\ c^2$$

وهي تتفق مع حساباتنا السابقــة

القــوة ــ الرباعيــة The Four-force

نحن الآن في موضع لصياغــة معادلــة القــوة بشكلها الثابت . لندخل متجـــه ــ رباعـي جديــد F_μ يسـمى بالقــوة ــ الرباعيــة . عندئـذ التعميـم النســـبي

لقانون نيوتن الثاني يكون

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} \qquad (٦٠\text{–}١٢)$$

وبالرجوع الى المعادلة (١٢– ٥٦)، نرى ان المعادلة السابقة يمكن كتابتها على النحو التالي

$$F_\mu = \gamma(u) \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx_\mu}{dt}\right) \qquad (٦١\text{–}١٢)$$

حيث u هي انطلاق الجسيم. اذن المركبات الثلاث الاولى للقوة – الرباعية تنسب الى القوة الاعتيادية $\vec{f}$ كالاتي

$$F_1 = \gamma(u) f_x \quad F_2 = \gamma(u) f_y \quad F_3 = \gamma(u) f_z \qquad (٦٢\text{–}١٢)$$

وعندنا للمركبة الرابعة

$$F_4 = ic\,\gamma(u) \frac{dm}{dt} \qquad (٦٣\text{–}١٢)$$

او مايكافيء ذلك

$$F_4 = \frac{i}{c}\,\gamma(u) \frac{dE}{dt} \qquad (٦٤\text{–}١٢)$$

اذن تنسب F_4 الى المعدل الزمني الذى تتغير فيه كتلة الجسيم او الكتلة والطاقة .

افرض مرة اخرى ثبوت مقدار الزخم الرباعي

$$\sum_\mu P_\mu^2 = -m_o c^2$$

وعند تفاضلها بالنسبة للزمن المناسب نحصل على

$$\sum_\mu P_\mu \frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \qquad (٦٥\text{–}١٢)$$

او

$$\sum_{\mu} P_{\mu} F_{\mu} = 0 \qquad (١٢-٦٦)$$

ويمكن تفسير هذا كصيغة لتعامد P_μ و F_μ . وعند كتابة المعادلة بدلالة المركبات وعكس الحد P_4F_4 نحصل على

$$P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3 = -P_4F_4 \qquad (١٢-٦٧)$$

وهي ، من المعادلات (١٢-٥٧)، (١٢-٦٢)، و(١٢-٦٣) ، تكون مكافئة الى

$$m\vec{v}.\vec{f} = -(icm)\frac{i}{c}\ \frac{dE}{dt}$$

او

$$\vec{v}.\vec{f} = \frac{dE}{dt} \qquad (١٢-٦٨)$$

اذن معدل التغيير الزمني للكمية $E = mc^2$ هو المعدل الذى تنجز فيه القوة الاعتيادية f شغلا على الجسيم . وهذا يتفق مع شرحنا السابق الخاص بعلاقة الكتلة والطاقة ، البند ١٢-١٠ .

تمارين

١٢-١- املأ الخطوات في اشتقاق معامل تحويل لورنتز ، المعادلة ١٢-١٤ .

١٢-٢- بين ان معكوس تحويل لورنتز، المعادلة (١٢-١٧) ينتج جبريا من التحويل المباشر ، المعادلة (١٢-١٦) .

١٢-٣ - اثبت صحة التقريبات التالية

(a) $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ if $v \ll c$

(b) $\gamma \approx \sqrt{\frac{c}{2\epsilon}}$ where $\epsilon = c - v$ if $v \approx c$

١٢ ــ ٤ ــ اذا كان انطلاق الارض المداري حول الشمس حوالي ٣٠ كم / ثانيــــة احسب تقلص لورنتز لقطر الارض بسبب هذه الحركــة ٠

١٢ ــ ٥ ــ اذا كان نصف ــ عمر الاشعاع الكوني μ ميزون هو ٢ر٢ ميكروثانيــة فــي محاور مرجعية فيها الميزون في حالة سكون ٠ جد نصف ــ عمر ميزونات μ المقتربــــة من الارض بانطلاق ٩٩٩ر٠ من سرعة الضوء كما يقيسها مشاهد على الارض ٠

١٢ ــ ٦ ــ في التمرين السابق ، افرض ان الميزونات تسير بخطوط مستقيمة خلال الجو٠ احسب سمك طبقــة ميل واحد للجو كما تظهر للميزونات ٠

١٢ ــ ٧ ــ ظهر في محاور مرجعية معينة A حدثان في آن واحد ٠ وكانا مفصوليــــن بمسافة ١٠ متر في تلك المحاور ٠ فما هي فاصلة المسافة والزمن بينهما كما يقيســـــها مشاهد B يتحرك بانطلاق $c/2$ في اتجاه خط العشرة الامتار ، ولمشاهد C يتحــرك بنفس الانطلاق عموديا على هذا الخط ؟ اعمل نفس الحسابات اذا كانت الفترة الزمنيــة بين الحدثين هي ١٠ $^{-٨}$ ثانية في المحاور A ٠

١٢ ــ ٨ ــ يقال عن الفترة بين حدثين في محاور مرجعية معينــة بانها شبيه فضائــي او شبيه زماني ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الفترة الزمنيــة Δt اكبر او اقل من الكمية $\frac{\Delta \ell}{c}$ على التتالي ، حيث $\Delta \ell$ هي الفاصلة الفضائية بين الحدثين ٠ برهــــن ان فترات شبيه الفضائية في احدى المحاور تظهر كشبيه فضائية في جميع المحاور وان شــبيـــه الزمانية في احدى المحاور تظهر كشبيه زمانية في الجميع ٠

١٢ ــ ٩ ــ اثبت ان التعاقب الموقت بين حدثين يكون محافظا في جميع انظمــة المحاور المرجعية اذا ظهر الحدثان في نفس الموضع الفضائي في محاور ما ٠

١٢ـ١٠ ـ اذا كان طول النبضة الضوئية التي تسير في الاتجاه ـ x في محاور مرجعية معينة A هو L . اثبت ان طول نفس النبضة كما تقاس في محاور مختلفة B ، تتحرك بالانطلاق v بالاتجاه ـ x هو $L\left[(c+v)/(c-v)\right]^{\frac{1}{2}}$

١٢ـ ١١ـ مركبة فضائية قامت برحلة الى اقرب نجم ، α ـ بروكسيما (α -Proxima) وعلى مسافة ٤٫٣ سنة ضوئية . وكانت تسير في رحلة ذهابها بانطلاق $0.9c$ ورحلة عودتها تسير بانطلاق $0.8c$ بالنسبة للارض . فما هو الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب كما يقاس بساعة في المركبة وساعة على سطح الارض ؟

١٢ـ ١٢ـ تركت مركبة فضائية الارض بانطلاق $c/2$ ورحلت لفترة زمنية معينة . بعدئذ دارت وعادت الى الارض بانطلاق $c/3$ بالنسبة للارض . فاذا كان الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب هو سنة كاملة كما قيس بساعة المركبة الفضائية ، فما هو الزمن الكلي كما يقاس بساعات الارض ؟ وماهي المسافة التي تقطعها المركبة قبل ان تدور للعودة ؟ وما هو الزمن في ساعة المركبة عند دورانها للعودة ؟

١٢ـ ١٣ـ في محاور مرجعية معينة A ، كان موضع المتجه لحدث هو $\vec{r}$ وظهر في الزمن t . بين ان موضع المتجه والزمن لنفس الحدث في محاور اخرى B تتحرك بسرعة ثابتة $\vec{v}$ بالنسبة الى A . هما

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}\left[\gamma t + \vec{r}.\vec{v}\,(\gamma - 1)/v^2\right]$$
$$t' = \gamma\,(t + \vec{r}.\vec{v}/c^2)$$

حيث $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، وكانت نقطتا الاصل لنظامي المحاور منطبقتين في ($t = t' = 0$) وهذا تعميم لتحويل لورنتز .

١٢ـ ١٤ـ لوحظت من الارض مجرتان متباعدتان A , B • وكانتا تبتعدان باتجاهين متعاكسين • فاذا كان انطلاق ابتعاد A هو $c/2$ و B هو $3c/4$ ، فما هو انطلاق ابتعاد B كما يقاس من مشاهد على A •

١٢ـ ١٥ـ اذا كان انطلاق جسيم $c/2$ في محاور مرجعية معينة • وكان خط مساره يعمل زاوية 45° مع المحور ـ x • جد انطلاق واتجاه حركة الجسيم كما تقاس في محاور مرجعية تتحرك بانطلاق $c/4$ في الإتجاه x • علما بان محاور النظامين متوازية • احسب كلا من القيم الكلاسيكية والنسبية •

١٢ـ ١٦ـ ظهر طول قضيب متحرك مساويا الى L_A في المحاور المرجعية A ومساويا الى L_B في محاور اخرى B تتحرك بانطلاق v بالنسبة الى A • فما هو الطول السكوني للقضيب ؟ علما بان جميع الحركة كانت في اتجاه واحد •

١٢ـ ١٧ـ استنبط العلاقة التالية لتحويل التعجيل

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}'}{\gamma^3(1 + v\dot{x}'/c^2)^3}$$

حيث $\ddot{x}' = d^2x'/dt'^2$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ، والمحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بانطلاق v باتجاه x • جد العلاقات المماثلة لتحويل مركبات y و z •

١٢ـ ١٨ جسيم لـه تعجيل ثابت a كما قيس في محاور فيها الجسيم آنيا في حالة السكون ، اى ان ، في النظام الملائم للجسيم • اثبت ان انطلاق الجسيم في محاور مرجعية ثابتة هو

$$\dot{x} = c\left[1 + (c/at^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

حيث يبدأ الجسيم من السكون في الزمن $t = 0$ ، اذا كانت $(a=g=32\ ft/sec^2)$

ماهو انطلاق الجسيم عندما يكون t مساويا لسنة واحدة ؟ وعندما يكون τ مساويا لسنة واحدة ، حيث τ يمثل الزمن المناسب للجسيم ،

١٢ـ ١٩ـ في التمرين السابق ، اثبت ان موضع الجسيم كدالة للزمن هو $ax^2 + 2c^2x = ac^2t^2$.

من هذا برهن على ان الاشارة الضوئية سوف لاتلحق بالجسيم اذا ارسلت متأخرة بزمن اقل من $t = c/a$ ،

١٢ـ٢٠ـ عجلت البروتونات في سايكلترون الى انطلاق بحيث تكون طاقتها الحركية ضعف طاقة السكون m_oc^2 فما هو انطلاقها ؟

١٢ـ ٢١ـ تؤثر قوة ثابتة $\vec{f}$ على جسيم كتلة سكونه m_o ، اذا بدأ الجسيم من السكون في الزمن $t = 0$ ، جد المسافة التي يقطعها في الزمن t ، كيف يختلف هذا التمرين من التمرين ١٢ـ ١٨ المذكور اعلاه ؟

١٢ـ ٢٢ـ يتحرك قضيب طوله ١٠ سم بالطول على طاولة افقية ملساء فيها فتحة قطرها ٩ سم، لنفرض ان انطلاق القضيب v يكون بحيث $\gamma = 2$ ، اي يظهر طول القضيب ٥ سم لمشاهد في حالة السكون بالنسبة للطاولة ، اهمل جاذبية الارض ولكن افرض ان دفعين متساويين مقدارهما $\hat{P}$ قد سلطا عموديا على نهايتي القضيب ، حالما انتهى الطرف الخلفي من الفتحة بذلك يدخل القضيب في الفتحة ، بين اذا سلطت الدفوع في آن واحد في محاور سكون الطاولة ، عندئذ هي ليست كذلك في محاور سكون القضيب ، ولكن الطرف الامامي يتسلم دفعة اولا ، اذن يدخل

القضيب الفتحة بزاوية ويمكنه النفوذ منها ولو ان قطر الفتحة يظهر ٥ر٤ سم فقط بالنسبة لمحاور السكون الاصلية للقضيب • جد ميلان القضيب الناتج • بين ان القضيب يظهر منحنيا في محاوره الاصلية للسكون خلال الفترة الزمنية بين الدفعتين •

١٢ــ ٢٣ــ تؤثر قوة $\vec{f}$ على جسيم كتلة سكونه m_o • اثبت مبتدأ بـ ان $\vec{f} = d(m\vec{v})/dt$

$$\vec{f} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}(\vec{f}\cdot\vec{v}/c^2)$$

١٢ــ ٢٤ــ بدأ صاروخ من السكون بكتلة سكونية كلية m_1 ، اذا كان u انطلاق الوقود بالنسبة للصاروخ • اثبت ان انطلاق الصاروخ النهائي هو

$$c\,\frac{(m_1/m_f)^{2u/c} - 1}{(m_1/m_f)^{2u/c} + 1}$$

حيث m_f هي كتلة السكون النهائية للصاروخ المتحرك • علما بان لاتوجد هناك قوى خارجية •

١٢ــ ٢٥ــ جسيم كتلة سكونه m_o ينحل الى جسيمين كتلتا سكونهما m_1 و m_2 على التتالي • اثبت ان طاقتيهما هي

$$E_1 = \left(\frac{m_o^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_o}\right) c^2$$

$$E_2 = \left(\frac{m_o^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_o}\right) c^2$$

١٢ ـ ٢٦ ـ جسيم كتلة سكونه m_1 وسرعته الابتدائية v_1 يصطدم بجسيم آخر كتلة سكونه m_2 الذى كان في حالة السكون • عند التصادم • التصق الجسيمان ولم يحدث خسارة في الطاقة نتيجة الاشعاع • اثبت ان كتلة سكون الجسيم المتكون النهائية هي

$$(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\,\gamma\,)^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$\gamma = (1 - v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢ ـ ٢٧ ـ حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها انطلاقا الجسيمين الابتدائيان v_1 ، v_2 على التتالي • واتجاههما الابتدائيان للحركة يختلفان بزاوية θ •

١٢ ـ ٢٨ ـ اصطدم بروتون يتحرك بانطلاق ابتدائي v مع بروتون آخر في حالة السكون • وبعد التصادم صنع خطا حركة البروتونين الزاويتين θ و ψ مع اتجاه حركة البروتون الساقط الابتدائية اثبت ان

$$2\cot\theta\cot\psi = 1 + \gamma$$

حيث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢ ـ ٢٩ ـ جد المصفوف لتحويل لورنتز بين منظومة المحاور X_μ ، X'_μ حيث المحوران X_1 ، X'_1 متوازيان • ومنظومة المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بانطلاق v باتجاه X_1 والمحوران X'_2 و X'_3 دورا بزاوية θ حول المحور X_1 • ترجم النتيجة النهائية الى الوراء بدلالة اربع معادلات في الاحداثيات الاعتيادية $x, y, z, t, x', y', z', t'$ •

١٢ــ٣٠ــ حل التمرين ١٢ــ٧ وذلك بالتعبير عن التعجيل بصيغة المتجه ــ الرباعي

١٢ــ ٣١ــ حل التمرين ١٢ــ٢٣ باستعمال القوة ــ الرباعية ٠

١٢ــ ٣٢ــ من حقيقة كون القوة ــ الرباعية F_μ تتحول كمتجه ــ رباعي جد قوانين التحويل للقوة الرباعية ٠ بين من هذه ان القوة الاعتيادية $\vec{f}$ تتحول كالاتي

$$f'_x = f_x - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\dot{y}f_y + \dot{z}f_z}{1 - \dot{x}\beta/c}\right)$$

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

١٢ــ ٣٣ــ استعمل النتيجة السابقة لتبين ان تحويل القوة يمكن ان يعبر عنها كما يلي

$$\vec{f} = \vec{f}' + (\gamma - 1)\vec{f}'_p + \gamma\,\frac{\vec{u}}{c} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{f}'\right)$$

حيث $\vec{f}'_p = \hat{j}f'_y + \hat{k}f'_z$, $\vec{v} = \hat{i}v$ هي سرعة المحاور التي تحمل الفتحة و $\vec{u}$ هي سرعة الجسيم ٠(هذه النتيجة لها تطبيقات في لكهرومغناطيسية ٠ اذن اذا كانت $\vec{f}'$ هي قوة كهربائية على جسيم مشحون ، فالحد الاخير يمثل قوة تؤثر بزاوية عمودية على حركة الجسيم ، اى قوة مغناطيسية)٠

اجوبة الاسئلة الفردية

الفصل ١

١ ــ ١ (أ) $17^{\frac{1}{2}}$

(ب) صفر

(جـ) 90°

١ ــ ٣ $q = \frac{1}{2}$

١ ــ ٥ -1

١ ــ ٧ $\vec{N} = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$N = 3$

$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

١ ــ ١٣ $\hat{i}'/2 + \hat{j}' + \hat{k}'\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

١ ــ ١٥

$$\begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix}$$

١ ــ ١٧ $\hat{i} - k, \ \hat{j} - \hat{k}, \ \hat{k}$

الفصل ٢

٢ ــ ١ (أ) $\vec{v} = \hat{i}c - gt\hat{j}, \ v = (c^2 + g^2t^2)^{\frac{1}{2}}$

$\vec{a} = -\hat{j}g$

(جـ) $\vec{v} = \hat{i}A\omega\cos\omega t - \hat{j}B\omega\sin\omega t$

$v = \omega(A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}}$

$\vec{a} = -\omega^2(\hat{i}A\sin\omega t + \hat{j}B\cos\omega t)$

٢ ــ ٣ $\vec{v}_{12} = \hat{i}b\omega(-\sin\omega t - \cos\omega t) + \hat{j}b\omega(\sin\omega t - \cos\omega t).$

$|\vec{v}_{12}| = b\omega 2^{\frac{1}{2}} \qquad d|\vec{r}_{12}|/dt = 0$

٢ ــ ٧ (أ) $a_\tau = g(1 + g^2t^2/c^2)^{\frac{1}{2}}, \ a_n = g(1 + c^2/g^2t^2)^{\frac{1}{2}}$

٢ـ٩

(أ) $\vec{v} = (\hat{i}_r k + \hat{j}_{\theta}\omega) b e^{kt}$, $v(0) = b\,(k^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}$

$\vec{a} = \hat{i}_r\,(k^2 - \omega^2) b e^{kt} + \hat{j}_{\theta}\, 2bk\omega\, e^{kt}$

$a(0) = b(k^2 + \omega^2)$

٢ـ١١ $v = b\omega\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\cos\omega t\right) + \frac{\pi^2}{16}\sin^2\omega t\right]^{\frac{1}{2}}$

٢ـ١٢ $(3 + 4t)\cos\omega t + (3t - 2t^2)\sin\omega t - 4t$

$\hat{i}(9t^2 + 2\omega\cos\omega t) + \hat{j}(-12t^3 + 2\omega\sin\omega t)$
$+ \hat{k}\left[(4 + 3\omega\sin\omega t) + (2t^2\omega - 3)\cos\omega t\right]$

٢ـ١٥

(أ) $(a_0^2 + v^4/b^2)^{\frac{1}{2}}$ ،

(ب) $a_0\left[2 + 2\cos\theta + (2v^2/a_0 b)\sin\theta + v^4/a_0^2 b^2\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث b يمثل نصف قطر العجلة ، v الانطلاق الامامي ، و θ قيست من اعلا نقطة على العجلة . يحدث التعجيل في نهايته العظمى في النقطة المعرفة بـ

$\tan\theta = v^2/a_0 b$

٢ـ١٩ $|\vec{a}| = b\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2\sin^2\theta)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2\cos^2\theta + \omega_2^4\sin^2\theta\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث قيست θ من الخط الشاقولي المركزي . في اعلى نقطة θ تساوى صفر

و $|\vec{a}| = b\,(\omega_1^4 + 4\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}$

الفصل ٣

٣ـ١ $(5/2)\,F_0 t_0^2/m$

٣ـ٢ $(7/6)\,c t_0^3/m$

٣ـ٥ $(v_0/g)\left[(\sin\theta + \mu\cos\theta)^{-1} + (\sin^2\theta - \mu^2\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\right]$

٣ ــ ٩

(أ) $V(x) = kx^{n+1}/(n+1)$

(ب) $v(x) = \pm\left[v_0^2 - 2kx^{n+1}\, m(n+1)\right]^{-\frac{1}{2}}$

(جـ) $x = \left[m v_0^2 (n+1)/2k\right]^{1/n+1}$

٣ ــ ١١

(أ) $x = -(m/c)\left[\nu + (mg/c)\ln(1 - c\,v/mg)\right]$

(ب) $x = -(m/2c)\ln(1 - c\nu^2/mg)$

٣ ــ ١٢ $F(x) = -mb^2x^{-3}$

٣ ــ ١٥ $x = (2m\,v_0/k)^{\frac{1}{2}} \tan\left[(k\,v_0/2m)^{\frac{1}{2}}\, t\right]$

٣ ــ ١٧ $(A_1/A_2)\,(m_1/2m_2)^{\frac{1}{2}}$

٣ ــ ٢٥ ٤٫٨٢ ذبذبة

الفصــل ٤

٤ ــ ١ محافظة (أ) ، (جـ) ، (د) ، (هـ) ، (و) .

٤ ــ ٣ $\left[\nu_0^2 - 2(a+b+c)/m\right]^{\frac{1}{2}}$

٤ ــ ١٣ $x = 2\cos\omega t,\ y = 2\cos\omega t + 2\sin\omega t$

٤ ــ ١٥ $x = 6^{-\frac{1}{2}}\cos(2^{\frac{1}{2}}t),\ y = 2^{-\frac{1}{2}}\cos 2t,$

$z = 24^{-\frac{1}{2}}\cos(8^{\frac{1}{2}}t)$

٤ ــ ١٧ $z = b/3$

٤ ــ ١٩ $\nu = (2gb)^{\frac{1}{2}}\ ,\ R = 3mg$

الفصــل ٥

٥ ــ ١ (أ) $S = m(g^2 + a_0^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \theta = \tan^{-1}(a_0/g)$

(ب) $S = m(g^2 + v_0^4/\rho^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \theta = \tan^{-1}(v_0^2/g\rho)$

٥ ـ ٣ $-(v^2/\rho)\hat{i} + (v^2/b)\hat{k}$

٥ ـ ٥ $\vec{A} = -\hat{i}_r\left[b\omega^2 + 2\omega\nu + v^2/b\right]$, $\vec{F} = m\vec{A}$

$\vec{A} = -\hat{i}_r\,(4v^2/b)$

$\vec{A} = \vec{0}$

حيث $\hat{i}_r$ يمثل وحدة متجهة قطبية ٠

٥ ـ ٧ حوالي ٦ر٦ باوند قوة شرق ٠

٥ ـ ٩ حوالي ٣٦٠٠ ميل بالساعة ٠

٥ ـ ١١
$$d^3\vec{R}/dt^3 = \dddot{\vec{r}} + 3\dot{\vec{\omega}} \times \ddot{\vec{r}} + 3\vec{\omega} \times \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$
$$+ 2\vec{\omega} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 3\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})$$
$$+ \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] + d\vec{A}_o/dt$$

٥ ـ ١٣ لـ θ_o صغيرة $\sin^2\theta_o \simeq \omega_e \sin\lambda\,(4/3)(\ell/g)^{\frac{1}{2}}$

التي تعطي $\theta_o \approx 0.004^o$

الفصـــل ٦

٦ ـ ٣ $F = -GMmr^{-2} - G(4/3)\pi\rho\, mr$

٦ ـ ٥ $\Phi(r) = -GM(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{G} = -GMr(r^2 + a^2)^{-3/2}$

٦ ـ ٧ قانون القوة ـ الخامسة العكسي

٦ ـ ٩ كـــلا $\theta = kt^{1/7}$

٦ ـ ١١ (أ) ٣٥٤ سنة (ب) ٩١ر٠ (جـ) $1.995\ v_e$ و $0.01\ v_e$

٦ ـ ١٣ E سالبة ٬ اى المدار اهليليجي

٦ ـ ٢٣ $a > (\epsilon/k)^{\frac{1}{2}}$

٦ ـ ٢٥ يتقدم الحضيض القمرى بحوالي ٤ ر١° لكل دورة للمدارات القريبة من الارض ٠

الفصـــل ٧

٧ ـ ١ $\vec{r}_{cm} = \hat{i}/3 + 2\hat{j}/3 + 2\hat{k}/3$

$\vec{v}_{cm} = \hat{i} + 2\hat{j}/3 + \hat{k}/3$

$\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

٧ ـ ٣ $v_0 (1 + m/M)^{-1}$

٧ ـ ٥ $v = 2.45\ v_0 , \quad \theta = 54^\circ\ 44'$

٧ ـ ١٧ بروتون $v_x' = v_y' = v\ (1 + 21^{\frac{1}{2}})/10 = 0.558\ v/$

هليوم $v_x' = v\ \ (1 + 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.139\ v$

$v_y' = v\ \ (9 - 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.11\ v$

٧ ـ ١٩ $\theta = \tan^{-1}\left[(21^{\frac{1}{2}} + 1)/(21^{\frac{1}{2}} - 1)\right]$

$= \tan^{-1} 1.84 = 61.5^\circ$

الفصل ٨

٨ ـ ١ (أ) $x_{cm} = y_{cm} = 4a/3\pi$

(ب) $x_{cm} = y_{cm} = 2a/2\pi$

(جـ) من القاعدة $h/4$

(د) من القمة $3b/5$

(هـ) $z_{cm} = 2b/3$

٨ ـ ٣ من المركز $2a/5$

٨ ـ ٥ $l\left[(\mu^2 + \mu \tan\theta)(1 + \mu^2)^{-1}(1 + \bar{\omega}/W) - \omega/2W\right]$

٨ ـ ٧ $\sin^{-1} (8\mu/3)$

٨ ـ ١٣ $ma^2\left[(1/2) - (4/3\pi)^2\right]$

٨ ـ ١٥

(أ) $2\pi\ (2a/3g)^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{4}} , \quad l' = a2^{\frac{1}{2}}/6$

(ب) $2\pi\ (7a/12g)^{\frac{1}{2}}\ 2^{\frac{1}{4}} , \quad l' = a2^{\frac{1}{2}}/12$

٨ ـ ١٩ $g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/a^2)$

٨ ــ ٢١ (أ) الافقيــة $(3/4)\, mg \sin\theta\, (3\cos\theta - 2)$

الشاقوليــة $(1/4)\, mg\, (3\cos\theta - 1)^2$

(ب) يبدأ الانزلاق عندما يكون

$$\left| 3\sin\theta\,(3\cos\theta - 2) \right| = \mu\,(3\cos\theta - 1)^2$$

ينزلق القضيب الى الخلف اذا استوفت المعادلة المذكــــورة اعلاه ما يلي $\theta < \cos^{-1}(2/3)$ او خلافا لذلك ينزلـــق الى الامام .

٨ ــ ٢٣ من المركــز $a/2$

٨ ــ ٢٥ $\hat{P}_A = m(g\ell)^{\frac{1}{2}}\,(2/9)^{\frac{1}{2}},\quad \hat{P}_B = m(g\ell)^{\frac{1}{2}}\left[(9/8)^{\frac{1}{2}} - (2/8)^{\frac{1}{2}}\right]$

لحالة غير المرن التام .

٨ ــ ٢٧

$$v_{cm_1} = -\hat{P}/4m\,,\quad \omega_1 = -3\hat{P}/2m\ell$$
$$v_{cm_2} = 5\,\hat{P}/4m\,,\quad \omega_2 = 9\hat{P}/m\ell$$
$$v_B = -\hat{P}/m$$

الفصــــل ٩

٩ ــ ١ $L = mab\,\omega/12$

الزاويــة بين $\vec{L}$ والمحور -x هــــي $\tan^{-1}(a/b)$

الزاويــة بين $\vec{\omega}$ والمحور -x هــــي $\tan^{-1}(b/a)$

٩ ــ ٣ $L = (3/4)\, ma^2\,\omega/2^{\frac{1}{2}}$

الزاوية بين $\vec{L}$ ومحور القرص هي $\tan^{-1}\frac{1}{2} = 27^\circ\, 33'$

٩ ــ ٥ $I_{xx} = m\,(b^2 + c^2)/12\,,\quad I_{yy} = m\,(c^2 + a^2)/12$

$$I_{zz} = m\,(a^2 + b^2)/12.$$

جميع ضرب القصور الذاتية صفــر

$$\vec{L} = m\,\omega\,(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}\left[a(b^2 + c^2)\,\hat{i} + b(c^2 + a^2)\,\hat{j} + c(a^2 + b^2)\,\hat{k}\right]/12$$

٩ ـ ٧ $I_{xx} = mb^2/6$, $I_{yy} = ma^2/6$, $I_{zz} = m(a^2 + b^2)/6$

$I_{xy} = -mab/12$, $I_{yz} = I_{xz} = 0$

$\theta = (\frac{1}{2}) \tan^{-1} \left[ab/(a^2 - b^2)\right]$

٩ ـ ٩ $a/b = 3^{-\frac{1}{2}}$

٩ ـ ١١ العزوم الرئيسية في مركز كرة كبيرة هي

$(2/5)ma^2$, $(11/56)ma^2$, $(11/56)ma^2$

٩ ـ ٢١ ٠٠٦٥ر٠ ثانية من قوس

٩ ـ ٢٣ تتحرك المنصة باتجاه الدفع بسرعة $\hat{P}/m$ (لتأثير الانتقالـــي)
وتبدا تتهاوى تحت تاثير الطواف الحر حيث يعمل متجه السرعـــــة
الزاوية الجديد زاوية $\tan^{-1}(4\hat{P}/ma\,\omega)$ مع محور تناظر المنصة ٠

٩ ـ ٢٥ حوالي ١٧ دورة بالدقيقة و ٤٣٠ دورة بالدقيقة ٠

٩ ـ ٢٧ حوالي ٣٨٥٠٠٠ دورة بالدقيقة

٩ ـ ٢٦ ٠

(أ)
$$ma^2 \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$ma^2 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$$

٩ ـ ٣١ $\vec{L} = ma^2\,\omega\, 3^{-\frac{1}{2}}\,(1/6) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T = ma^2\omega^2/36$

الفصـــــل ١٠

١٠ ـ ١ $(5/7)g \sin\theta$

١٠ ـ ٣ $x = (g/2\omega^2)(\sin\omega t - \sin h\,\omega t) + x_0 \cos h\,\omega t$

$g\left[(m+m'')/(2m+m')\right]$ ١٠ ـ ٥

حيث m'' هي كتلة الوتر المتعلـق على الطاولة

$m_1 : (23/25)g$ (اعلى) ١٠ ـ ٧

$m_2 : (13/25)g$ (اسفل)

$m_3 : (1/25)\ g$ (اسفل)

$m_4 : (9/25)g$ (اسفل)

$md^2R/dt^2 = mR\dot{\phi}^2 - \partial V/\partial R$ ١٠ ـ ١١

$md\,(R^2\,\dot{\phi})/dt = -\ \partial V/\partial\phi$

$md^2z/dt^2 = -\ \partial V/\ \partial z$

١٠ ـ ١٥ انظر المعادلتين (٤ ـ ٩٢) و (٤ ـ ٩٣)

$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2\ \sin^2\alpha - g\ \cos\alpha\ ,\ d(r^2\ \dot{\phi})/dt = 0$ ١٠ ـ ١٧

حيث α هي نصف زاوية المخروط .

$v_{cm_1} = (4\hat{P}/5m)\ ,\ \ \omega_1 = 0$ ١٠ ـ ١٨

$v_{cm_2} = (\hat{P}/5m)\ \ ,\ \ \omega_2 = (3\hat{P}/5ma)$

$P_x = m\dot{x} - qA_x\ ,\ P_y = m\dot{y} - qA_y,$ ١٠ ـ ٢١

$P_z = m\dot{z} - qA_z$

$H = P_\theta^2/(2m\ell^2) + P_\phi^2/(2m\ell^2\ \sin^2\theta) - mg\ell\cos\theta$ ١٠ ـ ٢٢

$\dot{\theta} = P_\theta/m\ell^2\ ,\ \dot{P}_\theta = -\left[(P_\phi^2\ \cos\theta)/(m\ell^2\ \sin^3\theta)\right]$

$-\ mg\ \ell\ \sin\theta$

$\dot{\phi} = P_\phi/m\ell^2\ \sin^2\theta\ \ ,\ \ \dot{P}_\phi = 0$

الفصـــل ١١

١١ ــ ١ $x = b$ (مســتقر) , $x = 0$ (غير مستقر)

$x = -b/2$ (مســتقر)

١١ ــ ٣ $V = k\left[y^2 - 2\ell(\ell^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right] - mgy$

١١ ــ ٩ $x = b : (2\pi/3b)(m/2k)^{\frac{1}{2}}$

$x = -b/2 : (2\pi/3b)\,(m/k)^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ١١ $2\pi\left[5a/3g\,(b - a)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ١٣ $2\pi\left[7a^2/5g\,(b - a)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ١٥ $x_1 = (A_0/2)\cos\omega_a t + (V_0/2\omega_a)\sin\omega_a t$
$+ (A_0/2)\cos\omega_b t + (V_0/2\omega_b)\sin\omega_b t$

١١ ــ ١٧ $\omega = \left[(9 \pm 17^{\frac{1}{2}})/8\right]^{\frac{1}{2}}\omega_0$

١١ ــ ١٩ $\omega = \omega_0\left[n + 1 \pm (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث $n = \ell_1/\ell_2$, $\omega_0 = (g/\ell_2)^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ٢٣ $\omega = \omega_0\left[3n + 4 \pm (9n^2 + 12n + 16)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

حيث $n = b/2a$, $\omega_0 = (g/2b)^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ٢٧ $\omega_1 = (k/m')^{\frac{1}{2}}$

$\omega_2 = \left[(k/m') + (2k/m)\right]^{\frac{1}{2}}$

١١ ــ ٢٩ (طوليــة) $v = (k/m)^{\frac{1}{2}}\,(\ell + \Delta\ell)$

(مستعرضة) $v = (k/m)^{\frac{1}{2}}\left[\Delta\ell(\ell + \Delta\ell)\right]^{\frac{1}{2}}$

الفصـل ١٢

١٢ ــ ٥ ٤٥ مايكروثانيــة

$\Delta r_B = 11.5\ m, \quad \Delta t_B = 1.92 \times 10^{-8}\ sec$ ١٢ ـ ٧

$\Delta r_c = 10\ m\ , \ \Delta t_c = 0$

$\Delta r_B = 13.2\ m\ , \quad \Delta t_B = 3.06 \times 10^{-8}\ sec$

$\Delta r_c = 10.14\ m$

$\Delta t_c = 1.15 \times 10^{-8}\ sec$

٤ر٥ سنة و ٣ر١٠ سنة ١٢ ـ ١١

الكلاسيكي $v = 0.37\ c\ , \quad \theta = 73^{\circ}\ 45'$ ١٢ ـ ١٥

حسب النظرية النسبية $v = 0.39\ c, \ \theta = 73^{\circ}\ 11'$

$c\left[1 + (m_0 c)^2/(ft)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ ١٢ ـ ٢١

$\left[m_1^2 + m_2^2 + \gamma(v_1)\ \gamma(v_2)\ 2m_1 m_2\ (2 - v_1\ v_2\ \cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$ ١٢ ـ ٢٧

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$ ١٢ ـ ٢٤

الفهرســــــــــت

ت

ج

ح

س

ش

ض

ط

ع

ق

ن

المصطلحات العلميـــــة

A

angular momentum	زخـم زاوى
annihilation	ابـادة
antipartiele	جسيم مضـاد
apsides	قبـــا
asidal angles	زوايا قبوية
asymptote	خط مقارب

B

ballistic	قذفي ، بلستي

C

canonical	قانونـــي
canical pendulum	بندول مخروطي
cartesian coordinates	محاور ديارتية
center of mass coordinates	محاور مركز الكتلة
celestial mechanics	ميكانيك سماوى
central force	قـوة مركزية
centripetal	جذب نحو المركز
conservative	محافظ
constraint	مقيـــد
contour lines	خطوط مناسيب
configuration	شكل عام ، وضع
compound pendulum	بندول مركب
compatible	منسجم
couple	مـــزدوج

creation	خلــــق
curve	منحـــــن
cycloid	د ويـــــرى
cross product	ضرب اتجاهي
characteristic time	زمن نوعـــي
coordinates	محـــــاور
coriolis	كوريولـــــــي
collision	تصـــادم
coefficient of restitution	معامل الارتداد

D

del operator	مؤثـــر دلتا
divergence	متفرقـــة
dynamic	دينامك
dampe	متضائـــــل
driving frequency	تردد دافــــع
driving force	قوة دافعـــــة
degree of freedom	درجات حريـــــة

E

exact differential	تفاضل دقيـــــق
elemntary particles	جسيمات بدائية
escape speed	انطلاق الافلات
effective potential	جهد فعلـــــي
exoergic	باعـــث حرارة
extreme	اعظم او اصغـــر

exact solution	حل دقيق
elliptic	موجز

F

field	مجال
foucault pendulum	بندول فوكو
forced harmonic motion	حركة توافقية
four-vector form	صيغة المتجه ـ الرباعي
frequency	تردد

G

gradient (grad.)	منحدر
gravitational	تثاقلي
geocentric latitude	زوايا خط العرض
generalized coordinates	أحداثيات معممة

H

harmonic	توافقي
hoop	طوق

I

isotropic	متجانس في الابعاد الثلاث
incomplete elliptic	موجز ناقص
isochronous	تساوى الزمن
inertial reference system	محاور مرجعية مستمرة
in phase	متوافقة الطور
impact	تصادم

impulse	دفع
inertia	قصور ذاتي
ignorable	مهمل
interferometer	مدخال
inertial forces	قوى زائفة
inertial terms	حدود زائفة

L

linear	خطي
limit	غاية
laminar	صفائحية

M

magnetron	مكترون
moment	عزم
matrix	مصفوف
moment of inertia	عزم القصور الذاتي
momental ellipsoid	المجسم الناقص للعزم
momentum	زخم
mode	صيغة

N

nonlinear	غير خطي
nul	صفر
nutation	ترنح
neutral	مستمر
normal	عياري
restoring force	قوة معيدة
resonance	رنين
response	استجابة
reduced mass	كتلة مصغرة
rigid body	جسم صلد
radius of gyration	نصف قطر التدويم
rectilinear	على خط مستقيم

O

oscillator	متذبذب

P

potential	جهد ، كامنة
projectile	قذيفة
parameter	بارمتر
pendulum	بندول
power series	متسلسلة اساسية
process	تقدم
plumb line	شاقول البناء
polar coordinates	احداثيات قطبية
principle	قاعدة
power law	قانون الاساسية
physical pendulum	بندول فيزيائي
principle axes	محاور رئيسية
proper time	زمن مناسب

Q

quality factor	معامل النوعية

R

radian	زاوية نصف قطرية
refrenee	مرجعية
relative	نسبي
resisting	مقاوم

spatial	فراغي
separable	قابلة الفرز
spherical pendulum	بندول كروى
static	ستاتيكي
scalar	كمية عددية
speed	انطلاق
stifness	مرونة
scattering	تشتت
silly putty	معجون سخيف
shell	قشرة
slipping	انزلاق
spin	تدويم
stable	مستقر
sinusoidal waves	موجات منحن الجيب
standing waves	موجات مستقرة
simultaneity	توقت
superposition	تدخل
secular equation	معادلة بدائية

T

translation	انتقالية
transverse	مستعرض
terminal velocity	سرعة المنتهى
transient	عابر
thrust	دفع مضاد
top	تدويم

transpose matrix	مصفوف التحويـــل
time dilatation	تمـــديد الزمـــن
twin paradox	توأم التناقض الظاهـــرى
transformation	تحويـــــل
U	
unstable	غير مستقـــر
V	
vector	كميـــة متجهـــــة
viscous	لزوجـــــة