College of Education -Tuzkhurmatu - Tikrit University

Department of physics Science

Academic Year.

Semester :Two

assistant teacher. Nabila Ibrahim Aziz

Integration and its applications

محاضرة التكامل وتطبيقاته

١. الدوال الأصلية والتكامل

تعريف١:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ أي أن $dF(x)=f(x)dx$ بمعني أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$

ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$. والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر

نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما ، دالة أصلية ، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي

تعريف٢:

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ ، حيث c عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

مثال١:

لدينا $d(x^5)=5x^4dx$ إذن $\int 5x^4dx=x^5+c$

و $d(e^{3x})=3e^{3x}dx$ إذن $\int 3e^{3x}dx=e^{3x}+c$

و $d(\cos x^2)=-2x\sin x^2dx$ إذن $\int -2x\sin x^2dx=\cos x^2+c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل

٢. قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

لقاعدة ١: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدداً ثابتاً فإن

$\int a dx = ax + c$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٢:

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$

$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$

$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة ٢:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٣:

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2)\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$3)\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة ٣:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

مثال ٤:

$$1)\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$

$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c = -2\frac{x^{-2}}{-2}+c = \frac{1}{x^2}+c$$

$$3)\ \int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}}+c$$

القاعدة٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)$ دوالاً قابلة للتكامل في x فإن:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm .... \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm .... \pm \int f_n(x)dx$$

مثال٥: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int (x^2 - 2x + 5)dx, \qquad 2)\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx, \qquad 3)\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx.$$

الحل :

$$1)\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + \int 5dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

$$2)\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{-3+1}}{-2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$$

$$3)\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx = \int x^5dx - \sqrt{2}\int x\,dx - 3\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

القاعدة٥:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x و n عدد يخالف -1 فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٦: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx, \qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx, \qquad 3)\int\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$$

الحل:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx:$$

لدينا $u=2x^3-6 \Rightarrow u'=6x^2$ وبالتالي فإن:

$$\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx=\int u'u^4\,dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx:$$

لدينا $u=x^4-2 \Rightarrow u'=4x^3$ ومنه فإن:

$$\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{24}\left(x^4-2\right)^6+c$$

$$3)\int\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\int\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $u=x^3+3x+1 \Rightarrow u'=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$ وبالتالي فإن:

$$\int\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int u'u^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

القاعدة ٦: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي:

$$\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+c$$

مثال ٧: احسب التكامل التالي :

$$1)\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx, \quad 2)\int\frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx, \quad 3)\int\frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx, \quad 4)\int\frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx$$

الحل :

$$1)\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx:$$

لدينا $u=x^4+2x+1 \Rightarrow u'=4x^3+2=2(2x^3+1)$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x+1\right| + c$$

$$2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx:$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4xe^{2x^2}$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right| + c$$

$$3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx:$$

$$u = 5-\tan x \Rightarrow u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

$$4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx:$$

$$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

3) $\int \sqrt{x}(x-3)^2 dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

5) $\int 3(3x^2-1)^3 x dx$

6) $\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

8) $\int 5(5x^7+2)^2 x^6 dx$

9) $\int \sqrt{1-4x}dx$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

11) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

12) $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

13) $\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

14) $\int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$

15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

٣. قواعد تكامل الدوال المثلثية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية:

$$1)\int u'\cos u\,dx=\sin u+c \qquad 2)\int u'\sin u\,dx=-\cos u+c$$
$$3)\int u'\sec^2 u\,dx=\tan u+c \qquad 4)\int u'\csc^2 u\,dx=-\cot u+c$$
$$5)\int u'\sec u\tan u\,dx=\sec u+c \qquad 6)\int u'\csc u\cot u\,dx=-\csc u+c$$
$$7)\int u'\tan u\,dx=\ln|\sec u|+c \qquad 8)\int u'\cot u\,dx=-\ln|\csc u|+c$$

مثال ٨: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int \sin 4x\,dx,\quad 2)\int \cos 2x\,dx,\quad 3)\int x\tan(2x^2+1)dx,\quad 4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx.$$

الحل:

$$1)\int \sin 4x\,dx=\frac{1}{4}\int 4\sin 4x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 4x+c$$
$$2)\int \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$
$$3)\int x\tan(2x^2+1)dx=\frac{1}{4}\int 4x\tan(2x^2+1)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\sec(2x^2+1)\right|+c$$
$$4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx=-2\int -\frac{1}{2}\cot\left(-\frac{x}{2}\right)dx=2\ln\left|\csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

مثال ٩: احسب التكاملات التالية :

$$1)\int[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx,\qquad 2)\int \sec^2(4x)dx$$
$$3)\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx,\qquad 4)\int x^2\csc(2x^3)\cot(2x^3)dx$$

الحل:

$$1)\ \int [\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx = \int \sin(3x+2)dx + \int \cos(2-3x)dx.$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)dx - \frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)dx.$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) - \frac{1}{3}\sin(2-3x) + c.$$

$$2)\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$$

$$3)\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = -\int -x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = \cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$$4)\int x^2\csc 2x^3\cot 2x^3 dx = \frac{1}{6}\int 6x^2\csc 2x^3\cot 2x^3 dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right)+c = -\frac{1}{6}\csc 2x^3 + c$$

مثال١٠: احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx., \qquad 2)\int \frac{\cos(3+5\ln 9x).}{7x}dx.$$

$$3)\int \cos 6x\cos(9+4\sin 6x)dx, \quad 4)\int \frac{\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x^3}}dx$$

الحل:

$$1)\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

$$u = 2-\sqrt{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 3(-2)\int -\frac{1}{2}\frac{\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = -6\int u'\sin u dx$$

$$= 6\cos u + c = 6\cos(2-\sqrt{x}) + c.$$

$$2)\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}dx$$

$$u = 3+5\ln 9x \Rightarrow u' = \frac{5}{x}$$

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}dx = \frac{1}{5}\frac{1}{7}\int \frac{5}{x}\cos(3+5\ln 9x)dx$$

$$= \frac{1}{35}\int u'\cos\ u\,dx = \frac{1}{35}\sin u + c = \frac{1}{35}\sin(3+5\ln 9x) + c$$

$$3)\int \cos\ 6x\ \cos(9+4\sin 6x)\ dx.$$

$$u = 9+4\sin 6x \Rightarrow u' = 24\cos 6x$$

$$\int \cos\ 6x\ \cos(9+4\sin 6x)\ dx = \frac{1}{24}\int 24\cos\ 6x\cos(9+4\sin 6x)\ dx$$

$$= \frac{1}{24}\sin(9+4\sin 6x) + c$$

$$4)\int \frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx$$

$$u = 5-4x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{4}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{x^3}}\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{2}\int u'\tan u\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sec u\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية :

1) $\int \cos^3 x \sin x dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} dx$

3) $\int (1+\sin t)^2 \cos t dt$

4) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$

5) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$

6) $\int \cos^3 2t \sin 2t\, dt$

7) $\int \cos 4\theta \sqrt{2-\sin 4\theta} d\theta$

8) $\int \tan^3 5x \sec^2 5x\, dx$

9) $\int \sin 3\theta \sec^2 \cos 3\theta\; d\theta$

10) $\int (1-\cos x)^3 \sin x dx$

11) $\int (1-\sin 2\vartheta)^{\frac{1}{3}} \cos 2\vartheta\; d\vartheta$

12) $\int x^7 \tan(8x^8+6)dx$

13) $\int \sin(7-\cos 3x)\sin 3x dx$

14) $\int te^{t^2} \sec(2+e^{t^2})\tan(2+$

15) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

16) $\int \frac{\sec x \tan x}{(3+2\sec x)^2} dx$

17) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

18) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\tan x}} dx$

19) $\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}}\, dx$

20) $\int \frac{3\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

21) $\int (2+\tan^2 x)\sec^2 x dx$

٤. قواعد تكامل الدوال الأسية

القاعدة١:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x و a عدد موجب يخالف 1 $(a \neq 1)$ يكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

مثال١١: احسب التكامل التالي:

$$1)\int 5^{-3x}\, dx, \qquad 2)\int x 6^{2x^2}\, dx.$$

الحل:

$$1)\int 5^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int -3(5^{-3x})dx = -\frac{1}{3}\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c.$$

$$2)\int x 6^{2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x\, 6^{2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

القاعدة٢:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' e^u \, dx = e^u + c.$$

مثال١٢: احسب التكامل التالي:

$$1)\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx, \quad 2)\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx$$

$$3)\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx, \qquad 4)\int x e^{x^2} \left(e^{x^2}+1\right)^7 dx$$

الحل :

$$1)\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx:$$

لدينا $u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x - 2 = 2(x-1)$ وبالتالي فإن

$$\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int u'\, e^u\, dx = \frac{1}{2} e^u + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-2x+1} + c$$

$$2)\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx :$$

لدينا $u = \sin x - x \Rightarrow u' = \cos x - 1$ وبالتالي فإن

$$\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx = \int u'\, e^u\, dx = e^u + c = e^{\sin x - x} + c$$

$$3)\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int e^x \left(e^x + 1\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow u' = e^x$$

$$\int e^x \left(e^x + 1\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int u' u^{-\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} + c = 2(e^x + 1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x + 1} + c$$

$$4)\int x e^{x^2} \left(e^{x^2} + 1\right)^7 dx$$

$$u = e^{x^2} + 1 \Rightarrow u' = 2x e^{x^2}$$

$$\int x e^{x^2} \left(e^{x^2} + 1\right)^7 dx = \frac{1}{2}\int u' u^7 dx = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}u^8 + c = \frac{1}{16}\left(e^{x^2} + 1\right)^8 + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right) dx$

2) $\int 2e^{2x+\cos x}(2 - \sin x) dx$

3) $\int \sec x \tan x\, e^{5+2\sec x} dx$

4) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

5) $\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}} dx$

6) $\int e^{1+\cos x} \sin x\, dx$

7) $\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$

8) $\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x} dx$

9) $\int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

10) $\int (e^{-x} + e^x)^2 dx$

11) $\int e^{2x} \sec\left(e^{2x} - 1\right) dx$

12) $\int 5e^{2x} e^{1+e^{2x}} dx$

13) $\int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

14) $\int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x\, \tan 2x} dx$

15) $\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t\, dt$

٥. التكامل بالتجزئة

مقدمة

لنفرض أننا نريد تكامل

$\int x\sin x dx$ أو $\int \sin x e^{-x} dx$

نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق قوانين التكامل مباشرة ففي مثل هذه الحالات نحاول حلها بالتجزئة وهي تتمثل في تحويل التكامل الذي لا يمكن حسابه مباشرة إلى مجموع جبري لدالة وتكامل يمكن حسابه

١,٥. قانون التكامل بالتجزئة

من قانون مشتق جداء دالتين لدينا $d(uv) = vdu + udv$

نكامل الطرفين فنحصل على: $uv = \int vdu + \int udv$

ومنه قانون التكامل بالتجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int udv$ إلى حساب التكامل $\int vdu$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u, dv

و طريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال ١٣: نفرض أننا نريد حساب $\int x\sin x dx$ لكننا لا يمكننا حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة

ولنفرض أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

و

$$dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int x\sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال ١٤: احسب ما يلي: $\int xe^{x}dx$

الحل :

نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحلها مباشرة، إذن فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزئة.

لنفرض أن:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

و $$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

نطبق القانون: $$\int u dv = uv - \int v du$$

ومنه $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

مثال ١٥: أوجد التكامل التالي: $\int \ln x \, dx$

الحل :

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x \, dx$

وبالتالي لنحسب التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$

فيكون لدينا $$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

مثال ١٦: احسب التكاملات التالية :

$$1) \int x^2 \ln x \, dx, \quad 2) \int x^3 \sin(2x^2) dx, \quad 3) \int x^5 e^{x^3} dx, \quad 4) \int \sin^2 x dx$$

الحل :

$$1) \int x^2 \ln x \, dx :$$

نفرض أن $$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

ولنفرض $$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

$$2)\int x^3\sin(2x^2)dx:$$

بفرض أن $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx$

وبفرض أن $dv=x\sin(2x^2)dx \Rightarrow v=-\frac{1}{4}\cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^3\sin(2x^2)dx=-\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)dx=-\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{8}\sin(2x^2)+c$$

$$3)\int x^5e^{x^3}dx:$$

بفرض أن $u=x^3,\ dv=x^2e^{x^3}dx$ فإن $du=3x^2dx,\ v=\frac{1}{3}e^{x^3}$

إذن: $\int x^5e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+c$

$$4)\int \sin^2 xdx:$$

لدينا $\int \sin^2 xdx=\int \sin x\sin xdx$

و لنفرض ما يلي :

$$u=\sin x \Rightarrow du=\cos xdx$$
$$du=\sin xdx \Rightarrow v=-\cos x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة $\int udv=vu-\int vdu$ يكون لدينا

$$\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 xdx$$

وبما أن

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$$

إذن

$$\int \sin^2 dx=-\sin x\cos x+\int\left(1-\sin^2 x\right)dx$$
$$=-\sin x\cos x+\int dx-\int \sin^2 xdx$$
$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 xdx$$
$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx+\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\Rightarrow 2\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$

ومنه فإن $$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + c = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^2 x dx$

2) $\int \ln(5x+3)dx$

3) $\int xe^{-3x}dx$

4) $\int x\sqrt{x+4}dx$

5) $\int xe^{1-3x}dx$

6) $\int x\sec x\tan x dx$

7) $\int x(x+5)^{-10}dx$

8) $\int x^2e^x dx$

9) $\int x^2\cos(5x^2)dx$

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x+1\right| + c$$

$$2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx:$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4xe^{2x^2}$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right| + c$$

$$3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx:$$

$$u = 5-\tan x \Rightarrow u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

$$4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx:$$

$$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$1)\int (2\sqrt{x}-3x^4)dx$

$2)\int \left(\frac{3}{x^4}-4x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

$3)\int \sqrt{x}(x-3)^2dx$

$4)\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$5)\int 3(3x^2-1)^3xdx$

$6)\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$8)\int 5(5x^7+2)^2x^6dx$

$9)\int \sqrt{1-4x}dx$

$10)\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

$11)\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

$12)\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

$13)\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

$14)\int \frac{\sec x\tan x}{3+2\sec x}dx$

$15)\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

٦. التكامل بالكسور الجزئية

تمهيد

تسمى الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة كسرية إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود في x

مثال ١٧: الدوال التالية: $\dfrac{1}{x(x^2+1)}, \dfrac{x(x+1)}{x^3+1}, \dfrac{-2x+1}{x^2+1}, \dfrac{x-1}{x^2+1}$ دوال كسرية

بينما الدوال التالية: $\dfrac{|x-2|}{x^3}, \dfrac{\sin x+e^x}{x^2}, \dfrac{\ln x}{x}$ ليست بدوال كسرية

إذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقيا

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقي بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي مثل

$$\frac{x^3-1}{x^2+1}=x-\frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل:

$\dfrac{A}{(x-r)^k}$ أو $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث ax^2+bx+c غير قابل للاختزال أي لا يقبل جذورا حقيقية

وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية)

الحالة الأولى:

إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)(x+r_3).....(x+r_n)$ حيث $r_1\neq r_2\neq r_3\neq\ldots\neq r_n$

وإذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا. فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A_1}{x+r_1}+\dfrac{A_2}{x+r_2}+\dfrac{A_3}{x+r_3}+.....\dfrac{A_n}{x+r_n}$ حيث $A_1,A_2,....,A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال ١٨: أوجد التكامل $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx$

الحل:

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام أحد قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثابتين A_1, A_2 يحققان ما يلي:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2} \qquad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على

$$2x+1=A_1(x+2)+A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1=A_1(-2+2)+A_2(-2-2)$

ومنه $-3=-4A_2 \Rightarrow A_2=\frac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1=A_1(2+2)+A_2(2-2)$

ومنه $5=4A_1 \Rightarrow A_1=\frac{5}{4}$

نعوض A_1, A_2 في المعادلة (1) فيصبح لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

إذن

$$\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+c$$

الحالة الثانية :

إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r)^n$ حيث $n\in \mathbb{N}$

و كانت $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا .فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x+r)}+\frac{A_2}{(x+r)^2}+\dots\frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}}+\frac{A_n}{(x+r)^n}$ حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال ١٩: احسب التكامل $\int\frac{x-2}{(x+1)^3}dx$

الحل :

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثوابت A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي :

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3} \qquad (2)$$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على

$$x-2=A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-1$ فنحصل على $-1-2=0+0+A_3$ ومنه $A_3=-3$

نأخذ $x=0$ فنحصل على $-2=A_1+A_2+A_3$

ومنه $-2=A_1+A_2-3 \Rightarrow A_2=1-A_1$

نأخذ $x=1$ فنحصل على $1-2=A_1(2)^2+A_2(2)+A_3$

ومنه فإن $-1=4A_1+2A_2-3 \Rightarrow -1=4A_1+2(1-A_1)-3$

بتعويض $A_2=1-A_1$ نحصل على

$$-1=4A_1+2-2A_1-3 \Rightarrow 2A_1=-1+1=0 \Rightarrow A_1=0$$

وبالتالي فإن $0=1-A_2 \Rightarrow A_2=1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (2) فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

إذن

$$\int\frac{x-2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-3\int\frac{1}{(x+1)^3}dx.$$

$$=-(x+1)^{-1}+\frac{3}{2}(x+1)^{-2}+c.$$

ملاحظة: يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٢٠: أوجد التكامل $\int\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx$

الحل :

نلاحظ أننا نحتاج إلى تجزئة الكسر $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$

نفرض أن A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي:

$$(3) \qquad \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معا

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1).}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1)$ فيكون لدينا

$$3x-1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)$$

لنأخذ $x=1$ فنحصل على $3(1)-1 = A_1(1-1)^2 + A_2(1+1)(1-1) + A_3(1+1)$

ومنه $2 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = 1$

لنأخذ $x=-1$ فنحصل على $3(-1)-1 = A_1(-1-1)^2 + A_2(-1+1)(-1-1) + A_3(-1+1)$

ومنه $-4 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = -1$

لنأخذ $x=0$ فنحصل على $3(0)-1 = A_1(0-1)^2 + A_2(0+1)(0-1) + A_3(0+1)$

ومنه $-1 = A_1 - A_2 + A_3 \Rightarrow A_2 = A_1 + A_3 + 1 = 1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (3) فيصبح لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

إذن
$$\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x-1| - (x-1)^{-1} + c = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات الآتية

1) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$

2) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

4) $\int \frac{3xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5) $\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}dx$

6) $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}dx$

7) $\int \frac{2t^2-4}{(t+1)(t-2)(t-3)}dt$

8) $\int \frac{t-5}{t^2+6t+5}dt$

9) $\int \frac{3t+7}{t^2-2t-3}dt$